

Ryhmäteoria

Harjoitus 1, syksy 2005

1. Olkoon G syklinen ryhmä, $G = \langle a \rangle$ ja $|G| = 286$.
Luettele G :n kaikki aliryhmät.
2. Osoita, että syklisen ryhmän jokainen aliryhmä on syklinen.
3. Tiedetään, että G on äärellinen ryhmä, $|G| > 1$ ja G :n ainoat aliryhmät ovat $\{1\}$ ja G . Mitä voit sanoa ryhmän G rakenteesta?
4. Tarkastellaan ryhmää $(G, +)$, missä $G = \{f \mid f \text{ on funktio } [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}\}$ ja $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ aina, kun $x \in [0, 1]$ (siis G sisältää kaikki välillä $[0, 1]$ reaaliarvoiset funktiot).
Merkitään $N = \{f \in G \mid f(\frac{3}{5}) = 0\}$. Osoita, että $(N, +)$ on G :n normaali aliryhmä ja $G/N \cong (\mathbb{R}, +)$.
5. Monisteen sivulla neljä tarkastellaan ryhmähomomorfismia $f : G \rightarrow F$ ja esitetään ominaisuus
(3) $N \trianglelefteq G$ ja f surjektio $\Rightarrow f(N) \trianglelefteq F$.
Osoita sopivan esimerkin avulla, että surjektiivisuutta koskeva oletus on välttämätön.
6. Olkoon S ryhmän G aito aliryhmä. Osoita, että joukko $G - S = \{x \in G \mid x \notin S\}$ generoi ryhmän G .