Todennäköisyyslaskennan jatkokurssi

Harjoitus 3, syksy 2005

1. Linnunradassa on viimeksi rajähtänyt supernova vuosina 1987, 1604, 1572 ja 1054. On arveltu, että näitä räjähdyksiä tapahtuu keskimäärin kerran 300 vuodessa. Oletetaan, että räjähdykset muodostavat Poisson-prosessin. Laske tähän nojautuen tn sille, että
   a) tietyssä 60 vuoden jaksossa räjähtää ainakin 2 supernovaa,
   b) tietyssä 450 vuoden jaksossa ei räjähdä yhtään supernovaa.

2. Kaukopuhelujen saapuminen muodostaa Poisson-prosessin. Tiedämme, että hetkeen $t > 0$ mennessä on saapunut yksi puhelu. Miten jakautuu tämän puhelun saapumishetki T?
   Opastus: Laske $P\{T \le s | X([0,t]) = 1\} \quad (0 < s < t)$.)

3. Sm:n X tf on f,
   a) $f(x) = \frac{c}{\sqrt{x}} e^{-\frac{x}{2}} \quad (x > 0)$,
   b) $f(x) = cx^5 e^{-2x} \quad (x > 0)$,
   ($f(x) = 0$, kun $x \le 0$). Määritä vakio c, jakauman nimi sekä $E(X)$ ja $D^2(X)$.

4. K:lla on asuntonsa yhteydessä kioski, jossa käy keskimäärin 6 asiakasta tunnissa. Asiakkaan saapumisen ilmoittaa kellonkilahdus; K on päättänyt palvella asiakkaita aina n:nnen kilahduksen jälkeen. Millä todennäköisyydellä K ehtii toimittaa 10 minuuttia kestävän askareen yhtäjaksoisesti "lepoaikanaan"?

5. Määritä $E(X^{-k})$, kun $X \sim \text{Gamma}(r, \lambda)$ ja $k \in \mathbb{N}_+$. Millä k:n arvoilla odotusarvo on olemassa?

6. Oletetaan, että molekyylin nopeudet $x-$, $y-$ ja $z-$koordinaattiakselien suuntaan ovat riippumattomia, $N(0, \sigma^2)$-jakautuneita sm:ia. Määritä molekyylin vauhdin tf. Tiedoksi: $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. (Maxwell päätyi tähän jakaumaan lähtien siitä, että kyseisen nopeusjakauman on oltava invariantti 3-ulotteisen avaruuden koordinaatiston kiertojen suhteen.)