

## Todennäköisyyslaskennan jatkokurssi

### Harjoitus 6, syksy 2005

1. (Buffonin neulaprobleema) Paperille, johon on piirretty yhdensuuntaisia suoria etäisyydelle  $2a$  toisistaan, pudotetaan umpimähkään neula; neulan pituus on  $2k, k < a$ . Laske tn, että neula leikkaa suoran.  
(Opastus: Neulan keskipisteen etäisyys lähimmästä suorasta olkoon  $X$  ja suuntakulma suorien suhteen  $Y$ .  $X$  ja  $Y$  ovat riippumattomia ja jakaumiltaan  $\text{Tas}(0, a)$ ,  $\text{Tas}(0, \pi)$ .)

2. Oletetaan, että satelliitista saapuva signaali on muotoa

$$S = X + Y,$$

missä  $X$  on havainto ja  $Y$  on häiriö (kohina). Oletetaan, että  $X \perp Y$ ,  $X \sim N(\mu, \sigma_1^2)$ ,  $Y \sim N(0, \sigma_2^2)$ . Määritä

a)  $\text{Corr}(S, X)$ ,

b)  $X$ :n ehdollinen jakauma ehdolla  $S = s$ .

(Vihje: Johda ensin  $(X, S)$ :n tf esittämällä  $(X, S)$  sv:n  $(U, V)$  affiinina muunnoksena, missä  $(U, V) \sim N(0, I)$ .)

3. Olkoon satunnaisvektorilla  $(X, Y)$  jatkuva jakauma tiheysfunktiona

$$f(x, y) = ce^{-x^2 - 2y^2}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

missä  $c > 0$  on vakio.

a) Määrää  $c$ .

b) Mikä tunnettu jakauma on kyseessä?

c) Määrää  $E(X)$ ,  $E(Y)$  ja  $\text{Cov}(X, Y)$ .

4. Olkoon satunnaisvektorilla  $(X, Y)$  2-ulotteinen normaalijakauma tiheysfunktiona

$$f(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{8}(3x^2 + 2xy + 3y^2 - 14x - 10y + 19) \right], \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Määrää  $X$ :n ja  $Y$ :n odotusarvot sekä kovarianssimatriisi.

(Vihje: Etsi  $z_0$  ja matriisi  $C$  siten, että eksponentissa oleva lauseke on  $-\frac{1}{2}(z - z_0)^T C^{-1}(z - z_0)$ , kun  $z = [x \ y]^T$ ,  $z_0 = [x_0 \ y_0]^T$ .)