Todennäköisyyslaskennan peruskurssi

Harjoitus 3 syksy 2005

1. Laatikossa on 15 palloa, joista 5 on valkoista. Palloista valitaan umpimähkään (ilman takaisinpanoa) 10 palloa. Millä todennäköisyydellä otoksessa on
   a) ainakin yksi valkoinen pallo,
   b) kaikki valkoiset pallot?

2. Joukosta E, jossa on N alkiota, otetaan n:n alkion satunnaisotos. Laske todennäköisyys, että tietty alkio $a \in E$ on mukana otoksessa, kun otanta tapahtuu
   a) ilman takaisinpanoa,
   b) takaisinpanolla.

3. Juoksulajissa on 48 kilpailijaa, jotka jaetaan arpomalla 6 alkuerään, kuhunkin erään 8 kilpailijaa. Millä tn:llä Suomen A ja Kenian B joutuvat samaan erään?

4. Ryhmä, johon kuuluu $2n$ poikaa ja $2n$ tyttöä, jaetaan umpumähkään kahteen yhtäsuureen osaan. Millä tn:llä kummassakin osassa on yhtä paljon tyttöjä ja poikia? Arvioi tätä todennäköisyyttä käyttäen Stirlingin kaavaa (kun n on suuri).

5. Laatikossa on N palloa, jotka on numeroitu luvuin $1, 2, \cdots, N$. Kokeessa nostetaan n palloa a) takaisinpanolla, b) ilman takaisinpanoa. Laske kummassakin tapauksessa todennäköisyys, että suurin esiintyneistä luvuista $=k$.
   (Opastus: Käytä hyväksi tapahtumia $B_k =$ ”suurin luku $\leq k$”.)

6. Osoita, että
$$\frac{P_1(A_k)}{P_2(A_k)} \to 1$$
   kiinteillä $n, k \in \mathbb{N}(k \leq n)$, kun P_1 edustaa otantaa ilman takaisinpanoa ja P_2 takaisinpanolla ($A_k =$ ”otoksessa on tasan k valkoista palloa”) ja kun
$$K \to \infty \quad \text{ja} \quad N - K \to \infty.$$

7. Olkoon $A_1, A_2, \cdots$ päättymätön jono σ-algebran $\mathcal{F}$ joukkoja. Ilmaise joukko-operaatioiden avulla: Tapahtumista $A_1, A_2 \cdots$
   a) sattuu ainakin yksi,
   b) ei satu yksikään,
   c) sattuvat kaikki jostakin indeksin arvosta lähtien,
   d) sattuu äärettömän monta.
   Ovatko nämä aina tapahtumia (so. σ-algebrassa $\mathcal{F}$)?