

## Lukuteoria I

43. Osoita, että formaalille eksponenttisarjalle  $e^T = \text{EXP}(T)$  pätee

- (a)  $e^{0 \cdot T} = 1$ .
- (b)  $e^{-T} = \frac{1}{e^T}$ .
- (c)  $e^{nT} = (e^T)^n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$ .
- (d)  $e^{iT} = \cos T + i \sin T ; \quad i^2 = -1$ .

44. Määräää 10 ensimmäistä Bernoullin lukua.

45. Osoita generoivan sarjan avulla tehtävän 36 kohtien e) ja f) tulokset.

46. Olkoot  $A(T), B(T) \in \mathbb{R}[[T]]$  ja  $A(T)B(T) = 1$ .

Näytää, että  $\text{ord}A(T) = \text{ord}B(T) = 0$ .

47. Määräää sellainen  $A(T) \in \mathbb{Z}[[T]]$ , että

$$(1 - T - T^2)A(T) = P(T),$$

missä

- (a)  $P(T) = T$ .
- (b)  $P(T) = 2 + T$ .

48. Osoita, että

$$\text{BIN}_{1/2}(T)^2 = 1 + T.$$

49. Määräää summat

$$S_m(n) = 1^m + 2^m + \cdots + n^m,$$

kun  $m = 1, \dots, 5$ .

50. Määräää Bernoullin polynomit  $B_n(x)$ , kun  $n = 0, 1, \dots, 5$ .