

Lukuteoria I

51. Olkoon $m \in 2\mathbb{Z}^+$. Osoita, että

$$\frac{2n+1}{\mathbb{Q}[n]} \mid S_m(n).$$

52. Olkoon $p \in \mathbb{P}$.

- (a) Osoita valuaation v_p ominaisuudet 1-4.
- (b) Osoita, että $\mathbb{Z}_{(p)}$ on rengas ja että sen yksikköryhmä $\mathbb{Z}_{(p)}^*$ on

$$\mathbb{Z}_{(p)}^* = \{A \in \mathbb{Q} \mid v_p(A) = 0\}.$$

53. Olkoot $p \in \mathbb{P}$, $k \in \mathbb{Z}^+$ ja $A = p^k/(k+1)$. Osoita, että

- (a) $v_p(A) \geq 0$.
- (b) jos $k \geq 2$, niin $v_p(A) \geq 1$.
- (c) jos $k \geq 3$ ja $p \geq 5$, niin $v_p(A/p^2) \geq 0$.

54. Olkoot $a \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}^+$. Osoita, että

- (a) $a(a^m - 1)B_m \in \mathbb{Z}$.
- (b) $a^m(a^m - 1)B_m/m \in \mathbb{Z}$.

55. Määräää summa

$$\sum_{k=1}^n \binom{k+r}{r+1}.$$

56. Määräää sarjojen

- (a) $\sinh(T)$,
- (b) $\cosh(T)$,
- (c) $\coth(T)$,
- (d) $\tanh(T)$,
- (e) $\cot(T)$,
- (f) $\tan(T)$,
- (g) $1/\cosh(T)$,
- (h) $1/\sinh(T)$,
- (i) $1/\cos(T)$,
- (j) $1/\sin(T)$

kertoimet.