Lukuteoria I

57. Todista Bernoullin polynomien ominaisuudet

    (a) $B_n(0) = B_n(1) = B_n$.
    (b) $\frac{d}{dx}B_n(x) = nB_{n-1}(x)$.
    (c) $B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$.
    (d) $B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$.
    (e) $B_n(1/2) = (1-2^{n-1})B_n$.

58. Osoita, että
$$1^m + 2^m + \cdots + n^m = \frac{B_{m+1}(n+1) - B_{m+1}}{m+1}.$$

59. Olkoon $p \in \mathbb{P}$, näytä, että
$$pB_2 \equiv 1^2 + 2^2 + \cdots + (p-1)^2 \pmod{p}.$$

60. (a) Olkoon $p \in \mathbb{P}, p \equiv 1 (\text{mod } 3)$. Näytä, että
$$B_{2p} = \frac{1}{6} + A_{2p},$$
    missä $A_{2p} \in \mathbb{Z}$.
    (b) Tarkastele lukujen B_{2k} nimittäjiä D_{2k}, kun $k = 0, 1, \cdots, 13, 19$.
    (c) Osoita, että alkuluvut 5, 7, 11, 13, 17 ovat säännöllisiä.
    $B_0 = 1, B_1 = -1/2, B_2 = 1/6, B_4 = -1/30, B_6 = 1/42, B_8 = -1/30,$
    $B_{10} = 5/66, B_{12} = -691/2730, B_{14} = 7/6.$

61. Asetetaan $a_1 = 1$ ja
$$a_{n+1} = \frac{1}{n}(1 + a_1^2 + \cdots + a_n^2), n \in \mathbb{Z}^+.$$
    Tutki väitettä
$$a_n \in \mathbb{Z} \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}^+.$$