Lukuteoria I

62. Näytä, että
$$E_{2k} = -\frac{4^{2k+1}}{2k+1} B_{2k+1}\left(\frac{1}{4}\right).$$

63. Osoita, että

    (a) $n(n+1) \underset{\mathbb{Q}[n]}{\mid} S_m(n)\ \forall m \in \mathbb{Z}^+$,

    (b) $n^2(n+1)^2 \underset{Q[n]}{\mid} S_m(n)\ \forall m \in 2\mathbb{Z}^+ + 1$.

64. Olkoon $A \in \mathbb{Q}$ ja $v_p(A) \geq 0\ \forall p \in \mathbb{P}$. Näytä, että $A \in \mathbb{Z}$.

65. Näytä, että

    (a) $E_n \in \mathbb{Z}\ \forall n \in \mathbb{N}$,

    (b) $s_1(n,k) \in \mathbb{Z}\ \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n$,

    (c) $S_2(n,k) \in \mathbb{Z}\ \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n$.

66. Näytä, että

    (a) $s_1(n,0) = \delta_{n,0}, s_1(n,n) = 1$,

    (b) $s_1(n,1) = (-1)^{n-1}(n-1)!$,

    (c) $s_1(n,2) = (-1)^n(n-1)!H_{n-1}$,

    (d) $s_1(n,n-1) = -\binom{n}{2}$.

67. Näytä, että

    (a) $S_2(n,m) = S_2(n-1,m-1) + mS_2(n-1,m)$,

    (b) $S_2(n,m) = \frac{1}{m!}\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}(m-i)^n$
    aina, kun $n \in \mathbb{Z}^+, 0 \leq m \leq n$.

68. Olkoon $\delta = xD = x\frac{d}{dx}$ ja $f = f(x)$. Näytä, että
$$\delta^n f = \sum_{k=0}^{n} S_2(n,k)x^k D^k f.$$

69. Osoita, että
$$B_m = \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k k!}{k+1} S_2(m,k).$$

70. Määrää Stirlingin kolmiot (mod p) 8. riville asti, kun $p = 2,3,5,7$.