

## Lukuteoria I

71. Olkoon  $\alpha \in \mathbb{C}^*$ . Osoita, että jonoit

- (a)  $(\alpha^n), (n\alpha^n)$ ,
- (b)  $(\alpha^n), (n\alpha^n), (n^2\alpha^n)$
- (c)  $(1), (H_n)$ ,
- (d)  $(n!), (n!H_n)$ .

ovat lineaarisesti vapaita  $\mathbb{C}$ :n yli.

72. Osoita differenssioperaattoreille

- (a)  $\Delta^n = (-1)^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-E)^k$ ,
- (b)  $E^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \Delta^k$ .

73. Olkoon  $D \in \mathbb{Z}$  neliövapaa. Osoita, että  $\sqrt{D} \notin \mathbb{Q}$ .

74. Olkoot  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$  ja  $r \in \mathbb{Q}^+$ . Osoita (Fermat'n suuren lauseen nojalla), että

$$\sqrt[n]{1+r^n} \notin \mathbb{Q}.$$

75. (a) Ratkaise rekursio

$$a_{n+2} - (n+3)a_{n+1} + (n+1)a_n = 0.$$

(b) Olkoot  $f_n = n!$  ja  $e_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ . Osoita, että  $\{(e_n), (f_n)\}$  on (a)-kohdan ratkaisukanta.

(c) Määräää rekursion

$$(n+2)b_{n+2} - (n+3)b_{n+1} + b_n = 0$$

ratkaisukanta.