Lukuteoria I

16. Näytä, että

    (a) $\binom{n}{k}\binom{k}{r} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{k-r}$,

    (b) $\binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1}$.

17. Osoita, että
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}.$$

18. Osoita, että

    (a) $\binom{n}{r} < \binom{n}{r+1} \Leftrightarrow 0 \leq r < \frac{1}{2}(n-1)$.

    (b) $\binom{n}{r} = \binom{n}{r+1} \Leftrightarrow 2 \nmid n$ ja $r = \frac{1}{2}(n-1)$.

19. Osoita, että

    (a) $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

    (b) $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$ kun $n \geq 1$.

20. (a) Osoita induktiolla, että
$$a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a + 1).$$

    Osoita, että

    (b) $a^n + 1 = (a+1)(a^{n-1} - a^{n-2} + \cdots - a + 1)$ jos $2 \nmid n$.

    (c) $A^n - B^n = (A-B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + \cdots + AB^{n-2} + B^{n-1})$.

21. Johda ja todista kaava
$$\sum_{k=0}^{m} k \cdot k! = (m+1)! - 1.$$

22. Todista, että
$$n^4 + 4^n \in \mathbb{P} \Rightarrow n = 1.$$