

Matematiikan Perusmetodit I/sov.

Harjoitus 11, syksy 2007

1. Määää derivaatan määritelmän avulla $f'(x_0)$, kun $f(x) = \frac{1}{x}$ ja $x_0 \neq 0$.

2. Määää derivaatta $f'(x)$, kun

a) $f(x) = (x^2 + 1)(x^3 - 2)^3$,

b) $f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3$,

c) $f(x) = \sin(x + \cos x)$,

d) $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$,

e) $f(x) = |x - 1|$,

f) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

3. Määää derivaatta $f'(x)$, kun

a) $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$,

b) $f(x) = \frac{\tan x}{1 + \tan x}$,

c) $f(x) = \overline{\text{arc}} \sin\left(\frac{2x}{x^2 + 1}\right)$,

d) $f(x) = \overline{\text{arc}} \tan \sqrt{x}$,

e) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$,

f) $f(x) = \log_a x\sqrt{x}$.

4. a) Määää $(f^{-1})'(1)$, kun $f(x) = e^x + x$.

b) Olkoon $f(x) = 1 + 2^{x+2}$. Määää $(f^{-1})'(y_0)$, kun $y_0 > 1$.

5. Tiedetään, että $f'(x_0)$ on olemassa. Määää seuraavat raja-arvot:

a) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{h}$,

b) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{xf(x_0) - x_0f(x)}{x - x_0}$.

6. Olkoon f funktio, joka on jatkuva arvolla $x = 0$ ja toteuttaa kaikilla x :n arvoilla ehdon $f(x)f(-x) = |x|$. Osoita, että f ei ole derivoituva kohdassa $x = 0$. Anna esimerkki tällaisesta funktiosta. [K85 P10]

7. Oletetaan, että pallon säteen kasvunopeus hetkellä t_0 on 10 cm/min, jolloin pallon säde on 6 cm. Määää kyseisen pallon pinta-alan ja tilavuuden kasvunopeudet hetkellä t_0 .