

Matematiikan Perusmetodit I/sov.

Harjoitus 12, syksy 2007

1. Määrä $f'(x)$, kun

$$\text{a) } f(x) = x^{\sin x}, \quad \text{b) } f(x) = x^{x^x}, \quad \text{c) } f(x) = (\log x)^{\log x}.$$

2. Osoita väliarvolauseen avulla, että

$$\text{a) } 1 - \frac{a}{b} < \log \frac{b}{a} < \frac{b}{a} - 1, \text{ kun } 0 < a < b.$$

$$\text{b) } \frac{x}{1+x} < \log(1+x) < x, \text{ kun } x > -1 \text{ ja } x \neq 0.$$

3. Määrä $f'(x)$, kun

$$\text{a) } f(x) = \overline{\arcc} \tan x - \overline{\arcc} \sin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$\text{b) } f(x) = \overline{\arcc} \tan \left(\frac{x-1}{x+1} \right) + \overline{\arcc} \tan \frac{1}{x}, \quad x \neq 0 \text{ ja } x \neq -1.$$

Tutki derivaatan $f'(x)$ avulla, millaisia arvoja $f(x)$ voi saavuttaa.

4. Määrä raja-arvot

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overline{\arcc} \sin x - x}{x^3},$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^3},$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow \infty} (x + e^x + e^{2x})^{\frac{1}{x}},$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x}$$

5. Määrä funktion f paikalliset ääriarvokohdat ja tutki niiden laatu, kun

$$\text{a) } f(x) = 1 + \sin x \cos x, \quad \text{b) } f(x) = x^2 \log x, \quad \text{c) } f(x) = x^x.$$

Hahmottele b)- ja c)-kohdissa funktion f kuvaaja .

6. Määrä funktion $f(x)$ suurin ja pienin arvo, kun

$$\text{a) } f(x) = \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}x, \quad x \in [-1, 1]$$

$$\text{b) } f(x) = xe^{-x^2}, \quad x \in [-2, 2].$$

7. On valmistettava kanneton suoran ympyräsylinterin muotoinen astia, jonka tilavuus on 8000 m^3 . Kuinka se on mitoitettava, jotta sen pinta-ala olisi mahdollisimman pieni?