Ryhmäteoria

Harjoitus 1, syksy 2007

1. Olkoon G syklinen ryhmä, $G =< a >$ ja $|G| = 286$.
   Luettele G:n kaikki aliryhmät.

2. Osoita, että syklisen ryhmän jokainen aliryhmä on syklinen.

3. Tiedetään, että G on äärellinen ryhmä, $|G| > 1$ ja G:n ainoat aliryhmät ovat $\{1\}$ ja G. Mitä voit sanoa ryhmän G rakenteesta?

4. Tarkastellaan ryhmää $(G, +)$, missä $G = \{f | f \text{ on funktio } [0, 1] \to \mathbb{R}\}$ ja $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ aina, kun $x \in [0, 1]$ (siis G sisältää kaikki välillä [0,1] reaaliarvoiset funktiot).
   Merkitään $N = \{f \in G | f\left(\frac{3}{5}\right) = 0\}$. Osoita, että $(N, +)$ on G:n normaali aliryhmä ja $G/N \cong (\mathbb{R}, +)$.

5. Monisteen sivulla neljä tarkastellaan ryhmähomomorfismia $f : G \to F$ ja esitetään ominaisuus

   (3) $$N \trianglelefteq G \text{ ja } f \text{ surjektio} \Rightarrow f(N) \trianglelefteq F.$$

   Osoita sopivan esimerkin avulla, että surjektiivisuutta koskeva oletus on välttämätön.

6. Olkoon S ryhmän G aito aliryhmä. Osoita, että joukko $G - S = \{x \in G | x \notin S\}$ generoi ryhmän G.