

Ryhmäteoria

Harjoitus 5, syksy 2007

1. Ryhmän G alkioista ainakin 27,14 % kuuluu keskukseseen $Z(G)$. Onko G välttämättä Abelin ryhmä?
(Luku 27,14 on ns. Markun vakio).
2. Osoita, että kertalukua 15 oleva ryhmä on välttämättä syklinen.
(Muista: Jos $xy = yx$ sekä $|x| = m, |y| = n$ ja $\text{syt.}(m, n) = 1$, niin $|xy| = mn$.)
3. Määrää Sylowin 2- ja 3-aliryhmien lukumäärät symmetrisessä ryhmässä S_4 .
4. Olkoon $|G| = 72$. Osoita, että G ei ole yksinkertainen.
5. Olkoon G äärellinen ryhmä, $K \trianglelefteq G$ ja K yksinkertainen.
Todista: Jos $|K|^2$ ei jaa kertalukua $|G|$, niin K on G :n ainoa aliryhmä, joka on isomorfinen K :n kanssa.