

## Ryhmäteoria

Harjoitus 9 syksy 2007

1. Olkoon  $\{1\} < N \trianglelefteq G$ . Sanotaan, että  $N$  on ryhmän  $G$  minimaalinen normaali aliryhmä, mikäli ehdosta  $M < N$  ja  $M \trianglelefteq G$  seuraa aina, että  $M = \{1\}$ . Osoita, että ratkeavan äärellisen ryhmän  $G$  minimaalinen normaali aliryhmä  $N$  on Abelin ryhmä.
2. Jatkoa tehtävään 1: Osoita, että  $|N|$  on alkuluvun potenssi.
3. Olkoon  $K$  äärellinen kunta ja  $a \in K$ . Osoita, että yhtälöllä  $x^2 - y^2 = a$  on ratkaisupari  $(x, y)$ .
4. Olkoon  $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SL(2, 5)$ . Määrä alkion  $R$  kertaluku.
5. Kuinka monta konjugaattia alkiolla  $R$  on ryhmässä  $SL(2, 5)$ ?