Todennäköisyyslaskenna peruskurssi

Harjoitus 3 syksy 2007

1. Laatikossa on 15 palloa, joista 5 on valkoista. Palloista valitaan umpimähkään ilman takaisinpanoa 10 palloa. Millä todennäköisyydellä otoksessa on
   a) ainakin yksi valkoinen pallo,
   b) kaikki valkoiset pallot?
2. Joukosta E, jossa on N alkiota otetaan n:n alkion satunnaisotos. Laske todennäköisyys sille, että tietty alkio $a \in E$ on mukana otoksessa, kun otanta tapahtuu
   a) ilman takaisinpanoa,
   b) takaisinpanolla.
3. Juoksulajissa on 48 kilpailijaa, jotka jaetaan arpomalla kuuteen alkuerään. Kussakin erässä on kahdeksan kilpailijaa. Millä todennäköisyydellä Suomen A ja Kenian B joutuvat samaan erään?
4. Ryhmä, johon kuuluu $2n$ poikaa ja $2n$ tyttöä jaetaan umpimähkään kahteen yhtäsuureen osaan. Millä todennäköisyydellä kummassakin osassa on yhtä paljon tyttöjä ja poikia? Arvioi tätä todennäköisyyttä käyttäen Stirlingin kaavaa, kun n on suuri.
5. Laatikossa on N palloa, jotka on numeroitu luvuin 1, 2, $\ldots$, N. Kokeessa nostetaan n palloa. Laske todennäköisyys sille, että suurin esiintyneistä luvuista on k, kun otanta tapahtuu
   a) takaisinpanolla,
   b) ilman takaisinpanoa.
   (Opastus: Käytä hyväksi tapahtumia B_k ="suurin luku on enintään k".)
6. Olkoot n ja k kokonaislukuja ja $k \leq n$. Lisäksi P_1 edustaa otantaa ilman takaisinpanoa ja P_2 otantaa takaisinpanolla. Olkoon

   $$A_k = \text{"otoksessa on tasan k valkoista palloa".}$$

   Osoita, että

   $$\frac{P_1(A_k)}{P_2(A_k)} \to 1,$$

   kun $K \to \infty$ ja $N - K \to \infty$.