Todennäköisyyslaskennan peruskurssi

Harjoitus 6 syksy 2007

1. Ilmoita satunnaismuuttujan X jakauma seuraavissa tapauksissa.
   a) X on viallisten tuoteiden lukumäärä laatikossa, johon on pakattu 48 tuotetta. Oletamme, että kullakin tuotteella on toisistaan riippumatta todennäköisyys 0,05 olla viallinen.
   b) X on ässien lukumäärä vedettäessä 13 korttia korttipakasta ilman takaisinpanoa.
   c) X on tietyssä lokerossa olevien pallojen lukumäärä, kun meillä on n palloa ja k lokeroa ja kukin pallo pannaan satunnaisesti valittuun lokeroon.
   d) X on turhien kertojen lukumäärä toistuvassa kahden nopan heitossa ennen ensimmäisen kuutosparin esiintymistä.
   e) X on värisokeiden lukumäärä 10 hengen otoksessa takaisinpanolla 100 hengen populaatiossa, jossa on kolme värisokeata.
2. Laske todennäköisyyys, että X on parillinen, jos
   a) $X \sim \mathrm{Geom}(p)$
   b) $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$
   c) $X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$
3. Lanttia heitetään kunnes sekä kruunu, että klaava ovat esiintyneet ainakin kaksi kertaa. Olkoon X sen kerran järjestysluku, jolla peli päättyy. Johda satunnaismuuttujan X pistetodennäköisyys– ja kertymäfunktiot ja määrää pienin arvo n, jolla $P\{X \le n\} \le 0,9$.
4. Viesti koostuu sadasta merkistä (joko 0 tai 1), joista jokainen merkki voi tiedonsiirtovaiheessa vaihtua (nollasta ykköseksi tai päinvastoin) todennäköisyydellä $p = 0,001$ muista merkeistä riippumatta. Millä todennäköisyydellä viesti on alkuperäisessä muodossaan kymmenen tiedonsiirtovaiheen jälkeen?
5. Tikkataulu muodostuu samankeskisistä r–, $2r$–, …, $9r$– ja $10r$–keskisistä ympyröistä, missä $r > 0$ on vakio. Näistä muodostuva uloin rengas antaa yhden pisteen, seuraava 2 jne. Keskellä oleva ympyrä antaa 10 pistettä. Oletamme, että tauluun heitettäessä osa-alueen todennäköisyys on verrannollinen sen pinta–alaan. Määritä yhdellä tauluun osuvalla tikalla saatavan pisteluvun odotusarvo.
6. Noppaa heitetään 4 kertaa. Olkoon X suurin esiintyneistä pisteluvuista. Määritä $\mathrm{E}(X)$.
7. Olkoon X diskreetti satunnaismuuttuja, jonka arvojoukko sisältyy joukkoon $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ ja
$$q_k = P\{X \ge k\}, \text{ kaikilla } k = 1, 2, \ldots$$
   Osoita, että $E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k$ ja että odotusarvo on olemassa, jos ja vain jos $\sum_{k=1}^{\infty} q_k < \infty$.