Analyysi II, syksy 2008
Harjoitus 1

1. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektorien $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ ja $\mathbf{y} = (y_1, \cdots, y_n)$ pistetulo $\mathbf{x} \bullet \mathbf{y}$ määritellään kaavalla

$$\mathbf{x} \bullet \mathbf{y} = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

Osoita, että pistetulo $\mathbb{R}^n$:ssä toteuttaa sisätuloaksiomit:

(S1) $\mathbf{x} \bullet \mathbf{x} \geq 0$ kaikilla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

(S2) $\mathbf{x} \bullet \mathbf{x} = 0$ jos ja vain jos $\mathbf{x} = \mathbf{0}$,

(S3) $\mathbf{x} \bullet \mathbf{y} = \mathbf{y} \bullet \mathbf{x}$ kaikilla $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$,

(S4) $(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}) \bullet \mathbf{z} = (\mathbf{x} \bullet \mathbf{z}) + \lambda(\mathbf{y} \bullet \mathbf{z})$ kaikilla $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ ja $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. Osoita, että kuvaus $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \bullet \mathbf{x}}$ on normi, ts. toteuttaa seuraavat ehdot:

(N1) $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ kaikilla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

(N2) $\|\mathbf{x}\| = 0$ jos ja vain jos $\mathbf{x} = \mathbf{0}$,

(N3) $\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda| \, \|\mathbf{x}\|$ kaikilla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ja $\lambda \in \mathbb{R}$,

(N4) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ kaikilla $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

3. Olkoot $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$ ja $\mathbf{b} = (2, -1, 3)$. Laske $\mathbf{a}+3\mathbf{b}$, $\mathbf{a}\times 2\mathbf{b}$, $(3\mathbf{a})\bullet(\mathbf{a}+\mathbf{b})$ sekä vektorien $2\mathbf{a}$ ja $3\mathbf{b}$ välisen kulman kosini. Määrää jokin yksikkövektori, joka on kohtisuorassa vektoreita $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ vastaan.

4. Esitä tasolla (piirrä) $\mathbb{R}^2$:n osajoukko $M = \{(x, y) \, : \, (16 - x^2)(9 - y^2) \geq 0\}$. Onko M rajoitettu?

5. Määrää funktion $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ kuvajoukko ja tutki, onko $\mathbf{F}$ injektio, kun

a) $\mathbf{F}(x, y) = (2x, 4y, x + y - 2)$

b) $\mathbf{F}(x, y) = (\cos x, \sin x, y)$

6. Määritellään funktiot $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ja $\mathbf{G} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ kaavoilla

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x, xy, xyz) \quad \text{ja}$$
$$\mathbf{G}(t) = (\sin t, t^2, t + t^3).$$

Määrää yhdistetty funktio $\mathbf{F} \circ \mathbf{G}$.

7. Olkoot

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (xy, z, -x) \quad \text{ja}$$
$$\mathbf{G}(x, y, z) = (2x, -z, y^2)$$

funktioita $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Määrää funktiot $\mathbf{F} \bullet \mathbf{G}$, $\mathbf{F} \times \mathbf{G}$, $\mathbf{F} \circ \mathbf{G}$ ja $\mathbf{G} \circ \mathbf{F}$.