Analyysi II, syksy 2008
Harjoitus 2

1. a) Osoita, että ristitulo on antikommutatiivinen, ts. että

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = -(\mathbf{y} \times \mathbf{x})$$

kaikilla $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$.

b) Todista seuraava ns. skalaarikolmituloa koskeva identiteetti:

$$\mathbf{x} \bullet (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) = \mathbf{y} \bullet (\mathbf{z} \times \mathbf{x}) = \mathbf{z} \bullet (\mathbf{x} \times \mathbf{y})$$

kaikilla $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$.

2. Olkoot $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Osoita, että $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ jos ja vain jos $\mathbf{x} \bullet \mathbf{z} = \mathbf{y} \bullet \mathbf{z}$ jokaisella $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$.

3. Osoita, että ristitulo on lineaarinen molempien tekijöidensä suhteen, eli että

$$(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}) \times \mathbf{z} = (\mathbf{x} \times \mathbf{z}) + \lambda(\mathbf{y} \times \mathbf{z})$$

ja

$$\mathbf{z} \times (\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}) = (\mathbf{z} \times \mathbf{x}) + \lambda(\mathbf{z} \times \mathbf{y})$$

kaikilla $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$ ja $\lambda \in \mathbb{R}$.

4. Olkoot $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y}$ avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektoreita.

a) Määrää välttämätön ja riittävä ehto sille, että $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \mathbf{0}$.

b) Osoita, että molemmat vektorit $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y}$ ovat kohtisuorassa vektoria $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ vastaan.

5. Joukko $T = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 3x - 5y + z = 2\big\}$ on taso avaruudessa $\mathbb{R}^3$.

a) Määrää sellaiset vektorit $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$, että

$$T = \{\mathbf{p} + s\mathbf{u} + t\mathbf{v} \ : \ s, t \in \mathbb{R}\} =: \mathbf{p} + \mathcal{L}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}.$$

b) Määrää jokin tason T normaalivektori, so. vektori $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$, joka on kohtisuorassa jokaista tason vektoria vastaan. Kuinka voit määritellä tason T vektorien $\mathbf{n}$ ja $\mathbf{p}$ avulla?

6. Määrää seuraavat raja-arvot (mikäli olemassa)

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x+y}$ b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$

7. Määrää seuraavat raja-arvot (mikäli olemassa)

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{y}$ b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,\pi)} \frac{\cos(xy)}{1-x-\cos y}$ c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$