Analyysi II, syksy 2008
Harjoitus 3

1. Olkoon $M \subset \mathbb{R}^n$. Todista seuraavat väitteet:
   a) M on avoin jos ja vain jos $\partial M \subset M^{\complement}$.
   b) M on suljettu jos ja vain jos $\partial M \subset M$.
2. Olkoon $0 < r < R$. Osoita, että avaruuden $\mathbb{R}^2$ osajoukko $[r, R] \times [0, 2\pi]$ on kompakti.
3. Tutki suppeneeko jono $(\mathbf{v}_k)_{k=1}^{\infty}$ avaruudessa $\mathbb{R}^2$, kun
   a) $\mathbf{v}_k = (k \sin \frac{1}{k}, \frac{1}{k} \sin k)$
   b) $\mathbf{v}_k = (\frac{1}{k}, (-1)^k)$.
4. Osoita, että funktio $\mathbf{F} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$,
$$\mathbf{F}(t) = \begin{cases} (2 - t^2, 3t - 2) & \text{kun } t \leq 1 \\ (2t - 1, t^3 + a) & \text{kun } t > 1 \end{cases}$$
   on jatkuva jos ja vain jos $a = 0$.
5. Osoita, että kuvaus $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on jatkuva, kun
   a) $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \bullet \mathbf{v}$, missä $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ on jokin kiinteä vektori,
   b) $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$.
6. Laske funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ osittaisderivaatat $\frac{\partial f}{\partial x}$ ja $\frac{\partial f}{\partial y}$, kun
   a) $f(x, y) = 4x^5 y + y^2(x - y)$
   b) $f(x, y) = \|(x, y)\|$
   c) $f(x, y) = \sin(x^2 y) \tan(xy)$.
7. Mikä ehto positiivisten kokonaislukujen m, n ja p täytyy toteuttaa, jotta raja-arvo
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^m y^n}{(x^2 + y^2)^p}$$
   on olemassa?