Analyysi II, syksy 2008
Harjoitus 4

1. Olkoon $\mathbf{a}$ joukon $D \subset \mathbb{R}^n$ kasautumispiste ja olkoot $\mathbf{F}, \mathbf{G} : D \to \mathbb{R}^p$ funktioita, joilla on raja-arvo pisteessä $\mathbf{a}$. Todista seuraavat väitteet:

   a) $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \Big(\mathbf{F}(\mathbf{x}) \pm \mathbf{G}(\mathbf{x})\Big) = \Big(\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{F}(\mathbf{x})\Big) \pm \Big(\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{G}(\mathbf{x})\Big)$.

   b) $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \Big(\mathbf{F}(\mathbf{x}) \bullet \mathbf{G}(\mathbf{x})\Big) = \Big(\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{F}(\mathbf{x})\Big) \bullet \Big(\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{G}(\mathbf{x})\Big)$.

2. Olkoon $\mathbf{a}$ joukon $D \subset \mathbb{R}^n$ kasautumispiste ja olkoot $f, g : D \to \mathbb{R}$ funktioita, joilla on raja-arvo pisteessä $\mathbf{a}$. Todista seuraavat väitteet:

   a) $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \Big(f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})\Big) = \Big(\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x})\Big)\Big(\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x})\Big)$.

   b) $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} = \frac{\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x})}{\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x})}$ jos $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x}) \neq 0$.

3. Olkoon $\mathbf{a}$ joukon $D \subset \mathbb{R}^n$ kasautumispiste ja olkoot $f, g, h : D \to \mathbb{R}$ funktioita. Oletetaan, että $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = b$. Osoita, että mikäli on olemassa sellainen $\delta > 0$, että $f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x}) \leq h(\mathbf{x})$ kaikilla $\mathbf{x} \in D \cap \mathrm{B}(\mathbf{a}, \delta)$, niin $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = b$.

4. Olkoon funktio $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ määritelty seuraavasti:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 - y & \text{kun } x > 0 \text{ ja } y > 0 \\ 1 & \text{muulloin} \end{cases}.$$

   a) Hahmottele funktion f kuvaaja.

   b) Mitkä ovat f:n epäjatkuvuuspisteet? (Osoita, että f ei ole jatkuva näissä pisteissä ja että f on jatkuva muissa pisteissä.)

   c) Missä pisteissä f on osittaindifferentioituva ensimmäisen muuttujansa suhteen? Entä toisen muuttujansa suhteen?

   d) Missä pisteissä f on differentioituva?

5. Anna esimerkki sellaisesta funktiosta $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

   a) että $\partial_1 f(\mathbf{0}) = 1$ ja $\partial_2 f(\mathbf{0}) = -1$.

   b) että $\partial_1 f(1,2)$ ja $\partial_2 f(1,2)$ ovat olemassa, mutta f ei ole jatkuva pisteessä $(1,2)$.

6. Anna esimerkki funktiosta $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

   a) joka ei ole osittaindifferentioituva ensimmäisen muuttujansa suhteen missään pisteessä, mutta on osittaindifferentioituva toisen muuttujansa suhteen jokaisessa pisteessä.

   b) joka ei ole osittaindifferentioituva minkään muuttujansa suhteen missään pisteessä, paitsi ensimmäisen muuttujan suhteen origossa, jossa $\partial_1 f(\mathbf{0}) = 0$.

7. Anna esimerkki funktiosta $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, jolla on suunnatut derivaatat origossa kaikkiin suuntiin, mutta ei ole differentioituva origossa.