Analyysi II, syksy 2008
Harjoitus 5

1. Osoita suoraan määritelmään nojautuen, että funktio $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, joka määritellään kaavalla $f(x, y, z) = x(y^2 + z)$, on differentioituva.

2. Olkoon $n \in \mathbb{Z}_+$. Osoita suoraan määritelmään nojautuen, että funktio $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2$ on differentioituva.

3. Osoita, että funktio $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{jos } (x,y) \neq \mathbf{0} \\ 0 & \text{jos } (x,y) = \mathbf{0} \end{cases}$$
ei ole differentioituva origossa.

4. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ määritelty seuraavasti:
$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{kun } x \neq 0 \\ 0 & \text{kun } x = 0 \end{cases}.$$
a) Määrää funktion f osittaisderivaatat jokaisessa pisteessä $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$.
b) Osoita, että f on differentioituva jokaisessa pisteessä $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$.

5. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,
$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{jos } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{muutoin} \end{cases}.$$
Osoita, että f ei ole osittaindifferentioituva ensimmäisen muuttujansa suhteen missään pisteessä, mutta on osittaindifferentioituva toisen muuttujansa suhteen jokaisessa pisteessä.

6. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,
$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{jos } y = x^2 \text{ ja } x \neq 0 \\ 0 & \text{muutoin} \end{cases}.$$
Osoita, että funktiolla f on suunnatut derivaatat origossa kaikkiin suuntiin ja osoita, että f ei ole differentioituva origossa.

7. Olkoon $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,
$$g(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{jos } x \in \mathbb{Q} \text{ ja } y \notin \mathbb{Q} \\ 1 & \text{jos } x \notin \mathbb{Q} \text{ ja } y \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{muutoin} \end{cases}$$
ja määritellään sen avulla funktio $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ seuraavasti:
$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 & \text{jos } y = 0 \text{ ja } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{jos } y = 0 \text{ ja } x \notin \mathbb{Q} \\ g(x,y) & \text{muutoin} \end{cases}.$$
Osoita, että f ei ole osittaindifferentioituva minkään muuttujansa suhteen missään pisteessä, paitsi ensimmäisen muuttujan suhteen origossa, jossa $\partial_1 f(\mathbf{0}) = 0$.