Analyysi II, syksy 2008
Harjoitus 6

1. Olkoot $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ja $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ seuraavat funktiot:

$$f(x, y, z) = \cos(xz) - x^2 y$$

$$G(t) = (t^2, t, \pi t).$$

Määrää funktio $f \circ G$ sekä sen 1. ja 2. derivaatta.

2. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differentioituva kuvaus, $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ ja $\mathbf{a} = (\sqrt{2}, 1)$. Määritellään $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kaavalla

$$g(t) = f(t\mathbf{a} + \mathbf{p}).$$

Laske $g'(0)$ kun tiedetään, että $\partial_1 f(\mathbf{p}) = -1$ ja $\partial_2 f(\mathbf{p}) = 2$.

3. Olkoot $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ määritelty seuraavasti:

$$f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\| \qquad \text{ja} \qquad g(t) = t^5.$$

(a) Tutki, missä pisteissä funktio $g \circ f$ on differentioituva, ja määrää sen osittaisderivaatat näissä pisteissä.

(b) Olkoot $\mathbf{v}, \mathbf{n} \in \mathbb{R}^n$ sellaiset, että $\mathbf{n} \perp \mathbf{v}$ ja $\|\mathbf{n}\| = 1$. Määritä

$$\partial_{\mathbf{n}}(g \circ f)(\mathbf{v}).$$

4. Määrää pinnalle

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 3x^2 + y^4 = z\}$$

pisteeseen $\mathbf{p} = (2, 1, 13)$ asetetun tangenttitason yhtälö.

5. Määrää ne avaruuden $\mathbb{R}^3$ yksikköpallon pinnan pisteet, joihin asetettu tangenttitaso kulkee pisteen $\mathbf{p} = (0, 2, 0)$ kautta.

6. Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ avoin väli, ja olkoot $F, G : I \to \mathbb{R}^n$ sekä $\varphi : I \to \mathbb{R}$ differentioituvia funktioita. Osoita, että

a) $(\varphi F)' = \varphi' F + \varphi F'$

b) $(F \bullet G)' = F' \bullet G + F \bullet G'$

c) kun $n = 3$, $(F \times G)' = (F' \times G) + (F \times G')$.

7. Määrää kaikki funktion

$$f(x, y) = \mathrm{e}^{x^2 y}$$

kolmannen kertaluvun osittaisderivaatat.