Analyysi II, syksy 2008
Harjoitus 7

1. Osoita, että luennoilla esiintyneet kaksi tangenttitason määritelmää ovat yhtäpitävät, so. että $T_1 = T_2$ kun

$$T_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; z = f(\mathbf{a}) + \partial_1 f(\mathbf{a})(x - a_1) + \partial_2 f(\mathbf{a})(y - a_2)\right\},$$

missä $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ on differentioituva pisteessä $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, sekä

$$T_2 = \left\{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \;:\; \nabla g(\mathbf{p}) \bullet (\mathbf{v} - \mathbf{p}) = 0\right\},$$

missä $\mathbf{p} = (a_1, a_2, f(\mathbf{a}))$ ja $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ on funktio $g(x, y, z) = f(x, y) - z$.

2. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{jos } (x, y) \neq \mathbf{0} \\ 0 & \text{jos } (x, y) = \mathbf{0} \end{cases}.$$

   a) Osoita, että $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ ja $\partial_1\partial_2 f(\mathbf{0}) \neq \partial_2\partial_1 f(\mathbf{0})$.

   b) Onko olemassa pisteen $\mathbf{0}$ ympäristöä, jossa $\partial_2\partial_1 f$ on jatkuva?

3. Olkoon $D \subset \mathbb{R}^n$ avoin, $f \in C^{m+1}(D)$ ja $\mathbf{p} \in D$. Osoita, että jokaiselle vektorille $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$, jolle yhdysjana $[\mathbf{p}, \mathbf{p} + \mathbf{h}]$ sisältyy joukkoon D, on olemassa sellainen $\theta \in]0, 1[$ että

$$f(\mathbf{p} + \mathbf{h}) = \sum_{k=0}^{m} \frac{\partial_{\mathbf{v}}^k f(\mathbf{p})}{k!} \|\mathbf{h}\|^k + \frac{\partial_{\mathbf{v}}^{m+1} f(\mathbf{p} + \theta\mathbf{h})}{(m+1)!} \|\mathbf{h}\|^{m+1},$$

missä $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|}$, $\partial_{\mathbf{v}}^0 f = f$ ja $\partial_{\mathbf{v}}^{k+1} f = \partial_{\mathbf{v}}(\partial_{\mathbf{v}}^k f)$ kaikilla $k = 0, 1, 2, \ldots, m$.
[Vihje: muodosta tuttu Taylorin kehitelmä sopivalle reaalifunktiolle.]

4. Määrää funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \sin(x^2+y^2)$ toisen asteen Taylorin polynomi origossa.

5. Neliömatriisia C sanotaan *ortogonaaliseksi* mikäli $C^{-1} = C^{\mathsf{T}}$. Olkoon S symmetrinen $n \times n$-matriisi ($S^{\mathsf{T}} = S$). Lineaarialgebrasta tiedetään, että tällöin on olemassa sellainen ortogonaalimatriisi C, että CSC^{-1} on diagonaalimatriisi (jonka diagonaalialkiot ovat matriisin S ominaisarvot $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$). Osoita, että

   a) S on positiivisesti definiitti jos ja vain jos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$.

   b) S on indefiniitti jos ja vain jos sillä on sekä aidosti positiivinen että aidosti negatiivinen ominaisarvo.

6. Muotoile edellisen tehtävän väitettä a) vastaava väite negatiividefiniitille matriisille S ja todista se.

7. Tutki seuraavien matriisien definiittisyyttä:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$