Analyysi II, syksy 2008
Harjoitus 8

1. Olkoon $D \subset R^n$ avoin joukko ja $\mathbf{p} \in D$. Osoita, että funktion $f \in C^2(D)$ toisen asteen Taylorin polynomi (keskipisteenä $\mathbf{p}$) voidaan kirjoittaa Hessin matriisin

$$H_{f,\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} \partial_1\partial_1 f(\mathbf{p}) & \partial_1\partial_2 f(\mathbf{p}) & \cdots & \partial_1\partial_n f(\mathbf{p}) \\ \partial_2\partial_1 f(\mathbf{p}) & \partial_2\partial_2 f(\mathbf{p}) & \cdots & \partial_2\partial_n f(\mathbf{p}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_n\partial_1 f(\mathbf{p}) & \partial_n\partial_2 f(\mathbf{p}) & \cdots & \partial_n\partial_n f(\mathbf{p}) \end{pmatrix}$$

avulla muodossa

$$\sum_{k=0}^{2} \frac{\partial_{\mathbf{v}}^k f(\mathbf{p})}{k!} \|\mathbf{h}\|^k = f(\mathbf{p}) + \nabla f(\mathbf{p}) \bullet \mathbf{h} + \mathbf{h}^{\mathsf{T}} H_{f,\mathbf{p}} \mathbf{h}$$

missä $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|}$ ja $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ on sellainen, että $[\mathbf{p}, \mathbf{p} + \mathbf{h}] \subset D$.

2. a) Määrää funktion $f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2y^2}$, $x, y \neq 0$ kriittiset pisteet ja niiden laatu (eli ovatko ne minimejä, maksimeja vai satulapisteitä).

   b) Määrää pienin etäisyys origosta pinnalle $S = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, xyz = 1\big\}$.

3. Olkoon $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $h(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2$ ja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{jos } t = 0 \\ \left(t^2 \sin \frac{1}{t}\right)^2 + t^4 & \text{muutoin} \end{cases}$$

sekä $f = g \circ h$. Osoita, että funktiolla $f$ on origossa aito globaali minimi. Olkoon $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ mielivaltainen yksikkövektori. Osoita, ettei ole olemassa sellaista lukua $\varepsilon > 0$, että $\partial_{\mathbf{v}} f(\mathbf{p}) > 0$ aina kun $0 < \|\mathbf{p}\| < \varepsilon$.

Seuraavissa tehtävissä määrää funktion $f$ kriittiset pisteet ja niiden laatu (minimi, maksimi vai satulapiste).

4. a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy$

   b) $f(x, y, z) = xy + xz$

5. a) $f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$

   b) $f(x, y) = (x + y)\mathrm{e}^{-xy}$

6. a) $f(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$

   b) $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$

7. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4(x^3y + xy^3) + 7x^2y^2$

   [Vihje: Newtonin binomikaava]