Analyysi II, syksy 2008
Harjoitus 9

1. Oletetaan että $\mathbf{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ on lineaarinen kuvaus, eli että
$$\mathbf{L}(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{y}) = \mathbf{L}(\mathbf{x}) + \lambda \mathbf{L}(\mathbf{y})$$
kaikilla $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ja $\lambda \in \mathbb{R}$. Osoita, että $\mathbf{L}$ on differentioituva. Mikä on kuvauksen $\mathbf{L}$ derivaatta eli Jacobin matriisi? (vrt. tehtävä 3)?

2. Olkoon $D \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja $\mathbf{F} : D \to \mathbb{R}^p$ funktio. Osoita, että $\mathbf{F}$ on differentioituva pisteessä $\mathbf{a} \in D$ jos ja vain jos jokainen sen koordinaattifunktio on differentioituva pisteessä $\mathbf{a}$.

3. Olkoon $\mathbf{F}$ kuten edellisessä tehtävässä. Osoita, että jos $\mathbf{F}$ on differentioituva pisteessä $\mathbf{a} \in D$, niin sen derivaatta on Jacobin matriisi $\mathcal{J}_{\mathbf{F},\mathbf{a}}$. Siis osoita, että jos on olemassa sellainen $p \times n$-matriisi A ja sellainen funktio ρ että $\rho(\mathbf{h}) \to \mathbf{0}$ kun $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$ ja
$$\mathbf{F}(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = \mathbf{F}(\mathbf{a}) + A\mathbf{h} + \|\mathbf{h}\| \, \rho(\mathbf{h})$$
kun $\|\mathbf{h}\|$ on riittävän pieni, niin silloin $A = \mathcal{J}_{\mathbf{F},\mathbf{a}}$.
[Vihje: valitse $\mathbf{h} = t\mathbf{e}_j$ ja tutki $\mathbf{F}$:n koordinaattifunktioita kun $t \to 0$]

4. Tutkitaan muunnosta $\mathbf{P}$ napakoordinaateista karteesisiin koordinaatteihin; siis kuvausta $\mathbf{P} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,
$$\mathbf{P}(r, \theta) = (r \cos\theta, r \sin\theta).$$
Onko $\mathbf{P}$ injektio? Missä pisteissä $\mathbf{P}$ on lokaalisti kääntyvä? Valitse, mikäli mahdollista, jokin sopiva pisteen $(1, 7)$ avoin ympäristö U ja määrää käänteisfunktio $\mathbf{P}^{-1} : \mathbf{P}(U) \to U$.

5. Muunnos $\mathbf{G} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ pallokoordinaateista karteesisiin koordinaatteihin määritellään kaavalla
$$\mathbf{G}(r, \phi, \theta) = (r \sin\phi \cos\theta, r \sin\phi \sin\theta, r \cos\phi),$$
ja muunnos $\mathbf{H} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sylinterikoordinaateista karteesisiin koordinaatteihin kaavalla
$$\mathbf{H}(\rho, \theta, z) = (\rho \cos\theta, \rho \sin\theta, z).$$
Laske molempien kuvausten Jacobin matriisit ja niiden determinantit.

6. Olkoot $\mathbf{G}$ ja $\mathbf{H}$ kuten tehtävässä 5, ja olkoon $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ kuvaus
$$h(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2).$$
Laske funktioiden $h \circ \mathbf{G}$ ja $h \circ \mathbf{H}$ Jacobin matriisit sekä ketjusäännöllä, että suoraan. Tulkitse tulos geometrisesti.

7. Osoita, että on olemassa pisteen $x = 0$ sisältävä avoin väli $I \subset \mathbb{R}$ ja sellainen yksikäsitteinen C^1-funktio $g : I \to \mathbb{R}$, että $g(0) = 1$ ja $y = g(x)$ on yhtälön
$$xy^7 + x^3y^2 = y + 2x^2 - 1$$
ratkaisu kaikilla $x \in I$. Laske myös funktion g derivaatta pisteessä 0.