Analyysi II, syksy 2008
Harjoitus 10

1. Olkoon S jokin avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukko.

   a) Osoita, että joukon S sisäpisteistö $\operatorname{Int} S = \mathring{S}$ on avoin joukko.

   b) Osoita, että $S \subseteq \mathring{S} \cup \partial S$.

   c) Anna esimerkki joukosta S, jolle $S \subsetneqq \mathring{S} \cup \partial S$.

2. Määrää funktion
$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k$$
ääriarvot pallopinnalla
$$S(0,1) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \,:\, \|\mathbf{v}\| = 1\}.$$

3. Määrää ne ellipsin $17x^2 + 12xy + 8y^2 = 100$ pisteet, jotka ovat lähimpänä ja kauimpana origosta.

4. Määrää funktion
$$f(x, y, z) = xy + z^2$$
ääriarvot suljetussa pallossa
$$\bar{B}(0,1) = \left\{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \,:\, \|\mathbf{v}\| \leq 1\right\}.$$

5. Tutki funktion
$$f(x, y) = (x + y + 1)\mathrm{e}^{-x-y}$$
ääriarvoja joukossa
$$S = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x, y > 0,\, xy = 1\right\}.$$

6. Osoita, että funktio $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,
$$f(x, y) = \begin{cases} -1 & \text{jos } x \leq 1 \\ 1 & \text{jos } x > 1 \end{cases}$$
on Riemann-integroituva suorakulmion $R = [0, 2] \times [0, 2]$ yli ja laske
$$\int_R f \,\mathrm{d}A.$$