

Analyysi II, syksy 2008
Harjoitus 11

1. Osoita *suoraan määritelmään nojautuen*, että funktio $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} -1 & \text{jos } x \leq 1 \\ 1 & \text{jos } x > 1 \end{cases}$$

on Riemann-integroituva suorakulmion $R = [0, 2] \times [0, 1]$ yli ja laske

$$\int_R f \, dA.$$

[Vihje: tutki jakoon $\{[0, 1 - \varepsilon] \times [0, 1], [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon] \times [0, 1], [1 + \varepsilon, 2] \times [0, 1]\}$ liittyviä ylä- ja alasummia kun $\varepsilon \rightarrow 0$]

2. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funktio

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{-x^2-y^2}}{xy-3x-2y+6} & \text{jos } x \neq 2 \text{ ja } y \neq 3 \\ \pi & \text{muutoin} \end{cases}.$$

Onko f integroituva yli suorakulmion $[1, 5] \times [1, 5]$? Mitkä ovat ne \mathbb{R}^2 :n suorakulmiot, joiden yli f on integroituva?

3. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funktio

$$f(x, y) = \begin{cases} y^{-2} & \text{jos } 0 < x < y < 1 \\ -x^{-2} & \text{jos } 0 < y < x < 1 \\ 0 & \text{muutoin} \end{cases}.$$

Totea, että iteroidut integraalit

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) \, dx \right) dy \quad \text{ja} \quad \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) \, dy \right) dx$$

ovat molemmat olemassa, mutta erisuuret. Onko f integroituva yli suorakulmion $[0, 1] \times [0, 1]$?

4. Laske seuraavat integraalit:

$$\text{a) } \iint_{[-3,3] \times [-3,3]} (6 - x^2 - y^2) \, dx \, dy \quad \text{b) } \iint_{[3,4] \times [6,7]} \log(xy) \, dx \, dy.$$

5. Laske integraali $\iint_S f \, dA$

- a) kun $f(x, y) = 6 - x^2 - y^2$ ja $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 6\}$,
b) kun $f(x, y) = 3 - |x| - |y|$ ja S on sen neliön sisäpuoli, jonka kärkipisteet ovat $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ ja $(0, -1)$.

6. Johda r -säteisen pallon tilavuuden kaava $\frac{4}{3}\pi r^3$ laskemalla puolipallon tilavuus sopivan positiivisen funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ integraalina.