Analyysi II, syksy 2008
Harjoitus 12

1. Laske $\iint_S y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$ kun $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x \geq 0, \, y \geq 0, \, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$.

2. Määrää integroimisalue iteroidussa integraalissa
$$\int_{-1}^{2} \int_{x^2}^{x+2} f(x,y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$$
ja laske integraalin arvo, kun $f(x,y) = x + 3y^2$.

3. Olkoon $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = xy + z - 1$. Laske polkuintegraali $\int_\gamma f \, \mathrm{d}s$ kun

   a) $\gamma(t) = (t^2, t^2, t^2)$, $-1 \leq t \leq 0$

   b) $\gamma(t) = \begin{cases} (t^2, t^2, 1) & \text{kun } -1 \leq t \leq 0 \\ (0, 0, 1 - t^2) & \text{kun } 0 < t \leq 1 \end{cases}$.

4. Olkoot $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ja $\beta : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ C^1-polkuja, ja oletetaan että $\alpha(b) = \beta(c)$. Polkujen α ja β yhdiste on polku $\gamma : [a, b + d - c] \to \mathbb{R}^n$,
$$\gamma(t) = \begin{cases} \alpha(t) & \text{kun } a \leq t \leq b \\ \beta(c + (t - b)) & \text{kun } b \leq t \leq b + d - c \end{cases}.$$
Osoita, että jos $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on jatkuva vektorikenttä, niin
$$\int_\gamma \mathbf{F} \bullet \mathrm{d}\gamma = \int_\alpha \mathbf{F} \bullet \mathrm{d}\alpha + \int_\beta \mathbf{F} \bullet \mathrm{d}\beta.$$

5. Olkoon $\alpha(t) = (1 + t, 1 - t, t^2)$, $t \in [0,1]$. Laske polkuintegraali $\int_\alpha \mathbf{F} \bullet \mathrm{d}\alpha$ kun

   a) $\mathbf{F}(x,y,z) = (0, 0, xyz)$

   b) $\mathbf{F}(x,y,z) = (xy, yz, xz)$.

6. Olkoon $\mathbf{F}(x,y) = (2xy + 3x^2, x^2)$ kun $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

   a) Osoita, että F on konservatiivinen.

   b) Laske $\int_\alpha \mathbf{F} \bullet \mathrm{d}\alpha$ kun α on C^1-polku pisteestä $(0,1)$ pisteeseen $(1,0)$.

7. Osoita, että vektorikenttä $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}^2$,
$$\mathbf{F}(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$
ei ole konservatiivinen.
[Vihje: laske $\mathbf{F}$:n polkuintegraali yksikköympyrän kehän yli.]

8. Olkoon L origon kautta kulkeva suora tasossa $\mathbb{R}^2$, olkoon α jokin suoraan L sisältyvä C^1-polku ja olkoon $\mathbf{F}(x,y) = (y, -x)$. Osoita, että
$$\int_\alpha \mathbf{F} \bullet \mathrm{d}\alpha = 0.$$