

# Matematiikan perusteet taloustieteilijöille I

## Harjoitukset syksy 2008

1. Laskeskele ja sieventele

a)  $\sqrt[3]{27}$

b)  $27^{\frac{2}{3}}$

c)  $27^{-\frac{1}{3}}$

d)  $x^2 \cdot \sqrt[4]{(x^{-\frac{8}{3}})^3 y^8}$

e)  $(x - 3)^2$

f)  $(x - 3)(x + 3)$

g)  $3 \sum_{i=1}^3 (2x_i + 1)$  kun,  $x_i = 2i$  kaikilla  $i \in \mathbb{N}_+$ .

2. Osoita induktiolla, että

a)  $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n + n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}_+$

b)  $2 + 4 + 8 + 16 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}_+$

3. Ratkaise yhtälöt

vast:

a)  $2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 = 0$

a)  $x = -1 \vee x = 3 \vee x = 1/2$

b)  $2x^2 - 4x + 2 = 0$

b)  $x=1$

c)  $-4x^3 + 5x^2 - 2x = -x^4$

c)  $x = 0 \vee x = 1 \vee x = 2$

d)  $x^2 - x + 2 = 0$

d) ei ratk.

4. Jaa seuraavat lausekkeet tekijöihin

a)  $2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$

b)  $2x^2 - 4x + 2$

c)  $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x$

d)  $x^2 - x + 2$ .

5. Ratkaise yhtälöt

- a)  $|x| + |3x - 1| = 4$
- b)  $|x - 6| = 3 - 2x$
- c)  $\sqrt{x} = 2 - x$
- d)  $\sqrt{x} + \sqrt{x - 4} = 2$
- e)  $|x - 6| = |3 - 2x|$

vast:

- a)  $x = -3/4 \vee x = 5/4$
- b)  $x = -3$
- c)  $x = 1$
- d)  $x = 4$
- e)

6. Ratkaise seuraavat epäyhtälöt

- a)  $2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 \leq 0$
- b)  $2x^2 - 4x + 2 \leq 0$
- c)  $|x| + |3x - 1| \leq 4$
- d)  $|x - 6| \leq 3 - 2x$
- e)  $-4x^3 + 5x^2 - 2x \leq -x^4$
- f)  $x^2 - x + 2 \leq 0$
- g)  $|x - 3| + |x^2 - 3x + 2| < 2$
- h)  $\frac{1}{x} < \frac{3x - 1}{x} \leq 2$
- i)  $|x - 6| \leq |3 - 2x|$

vast:

- a)  $x \leq -1 \vee 1/2 \leq x \leq 3$
- b)  $x = 1$
- c)  $-3/4 \leq x \leq 5/4$
- d)  $x \leq -3$
- e)  $0 \leq x \leq 2$
- f) ei ratk.
- g)  $1 < x < 3$
- h)  $\frac{2}{3} < x \leq 1$
- i)

7. Ratkaise seuraavat epäyhtälöt

- a)  $\sqrt{x} < 2 - x$
- b)  $\sqrt{x} \geq 2 - x$
- c)  $\sqrt{x} + \sqrt{x - 4} < 2$

vast:

- a)  $0 \leq x < 1$
- b)  $x \geq 1$
- c) ei ratk.

8. Ratkaise seuraava epäyhtälö käyttäen sekä 1<sup>o</sup> ja 3<sup>o</sup> tapaa.

$$\sqrt{x + 1} < \sqrt{x + 2} - 3.$$

9. Etsi seuraavien funktioiden määrittelyjoukot

a)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4x-1}} - \sqrt{1-x^2}$       vast:  
a)  $M_f = ]1/4, 1]$   
b)  $f(x) = \sqrt{\sqrt{x}-1}$       b)  $M_f = [1, \infty[.$

10. Olkoon  $f(x) = 2x^2 + 3$  ja  $g(x) = \sqrt{x-1}$ .

Määrää

a)  $(f \circ g)(x)$  ja  $(f \circ g)(1)$

b)  $(g \circ f)(x)$  ja  $(g \circ f)(1)$

c)  $M_{g \circ f}$  ja  $M_{f \circ g}$

Vast: a)  $(f \circ g)(x) = 2x + 1$ ,    b)  $(g \circ f)(x) = \sqrt{2x^2 + 2}$ ,  
c)  $M_{g \circ f} = \mathbb{R}$  ja  $M_{f \circ g} = [1, \infty[.$

11. Etsi suora, joka sisältää suorien  $3x - 4y + 7 = 0$  ja  $6x - 2y - 3 = 0$  leikkauspisteen ja täyttää seuraavat ehdot

a) kulkee origon kautta

b) on yhdensuuntainen suoran  $3x - 2y + 7 = 0$  kanssa

c) on kohtisuorassa suoraa  $3x - 2y + 7 = 0$  vastaan.

Vast: a)  $y = \frac{51}{26}x$ ,    b)  $y = \frac{3}{2}x + \frac{4}{6}$     c)  $y = -\frac{2}{3}x + \frac{205}{54}$ .

12. Ratkaise yhtälöparit

a)  $\begin{cases} -x - y + 2 = 0 \\ 2x + 2y - 4 = 0 \end{cases}$       b)  $\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ 4x + 2y - 5 = 0 \end{cases}$

c)  $\begin{cases} 3x - 4y + 7 = 0 \\ 6x - 2y - 3 = 0 \end{cases}$       d)  $\begin{cases} y = \frac{x}{20} + 1 \\ x = 32 - 4y - y^2 \end{cases}$

Vast: a)  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,    b) ei ratk.

c)  $x = \frac{13}{9}, y = \frac{17}{6}$ ,    d)  $(20,2)$  tai  $(-540,-26)$ .

13. Ratkaise

a)  $3^{-x^2} = (\sqrt[4]{3})^{-5x+1}$ ,

b)  $2 \log_5(x+1) = 1$ ,

c)  $\frac{3^{2x-3}}{\sqrt{2}} < \frac{1}{\sqrt{54}}$ ,

d)  $2^{2x} + 1 \leq 2^{x+1}$ .

Vast:

a)  $x = 1$  tai  $x = \frac{1}{4}$ ,    b)  $x = \sqrt{5} - 1$ ,

c)  $x < 3/4$ ,    d)  $x = 0$ .

14. Ratkaise

a)  $\log_{10}(x^2 - 1) = 1 + \log_{10}(x - 1)$     b)  $2^{x^2} = 3^{2x}$

c)  $\log_2(2x) = \log_4(3x)$     d)  $\log_{\frac{1}{2}}(2x - 1) + 2 > \log_{\frac{1}{2}}(3x - 4)$

e)  $\log_{1/2} 2x < \log_2 7$     f)  $2^{x^2} < 3^{2x}$     g)  $\log_2 2x = \log_3 x$ .

Vast:

a)  $x = 9$     b)  $x = 0$  tai  $x = \log_2 9$     c)  $x = 3/4$     d)  $x > 3/2$

e)  $x > 1/14$     f)  $0 < x < \log_2 9$     g)  $x = \sqrt[{\log_2 3 - 1}]{1/3}$ .

15. Tutki seuraavien funktioiden bijektiivisyyttä ja määritä käänteisfunktio jos mahdollista

a)  $f(x) = x^2 + 2x + 1$ ,

b)  $f(x) = \sqrt{x-1}$ ,

c)  $f(x) = 5x + 3$ .

Vast:    a)  $f^{-1}(x) = -1 \pm \sqrt{x}$     b)  $f^{-1}(x) = x^2 + 1$

c)  $f^{-1}(x) = \frac{1}{5}x - \frac{3}{5}$ .

16. Määritä

- a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x + 5}{x^3 + 6x^2 + 7}$
- b)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ , kun  $f(x) = \begin{cases} -x + 1, & x \geq 0 \\ 3x, & x < 0 \end{cases}$
- c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{3x^2}$
- d)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3}{x - 3}$
- e)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3}$
- f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3}$
- g)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^3}\right)^2$

Vast: a)  $\frac{1}{2}$  b)  $\nexists$  c) 0 d)  $\nexists$  e) 0 f)  $\nexists$  g)  $\infty$ .

17. Määritä

- a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2}{2x^3 + 1}$
- b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + x + 1}{2x^2 + 5x + 2}$
- c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 1}{x^2 + 4x}$
- d)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 9}$
- e)  $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{1}{x + 2} + \frac{4}{x^2 - 4}\right)$
- f)  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^3 - 4x^2 - 5x + 3}{2x^2 + 3x - 2}$
- g)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + x^3 + x^4 - 4}{x - 1}$ .

Vast: a) 0 b)  $\frac{3}{2}$  c)  $\infty$  d)  $9/2$  e)  $-1/4$  f)  $-6/5$  g) 10.

18. Määritä

- a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}\right)$
- b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 - x + 1})$
- c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x + \sqrt{x^2 - x + 1})$
- d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$
- e)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}$
- f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} + 1}{x}$

$$\text{g) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^2 - 1}}{2x} \qquad \text{h) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$$

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow \infty} (x^4 + 2x^2 + 1).$$

Vast: a)  $\infty$  b)  $1/2$  c)  $\infty$  d)  $-1$  e)  $2$  f)  $\neq$  g)  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$  h)  $1/2$  i)  $\infty$ .

19. Onko funktio  $f(x)$  jatkuva, kun

$$f(x) = \begin{cases} 5x - 2, & x \leq 1 \\ 3x, & 1 < x < 2 \\ 2x^2 - 5, & x \geq 2 \end{cases}$$

Vast: ei jatkuva kohdassa  $x = 2$ .

20. Voidaanko funktio  $f(x) = \frac{x-1}{|x-1|}$  määritellä kohdassa  $x = 1$  niin, että se olisi jatkuva tuossa kohdassa?

21. Derivoi seuraavat funktiot

$$\text{a) } x + 2\sqrt{x} \qquad \text{b) } \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \qquad \text{c) } x(2x-3)(5x-4)^3$$

$$\text{d) } \sqrt{\frac{x-2}{x+3}} \qquad \text{e) } (2-3x^2)^3 \qquad \text{f) } \sqrt[3]{x^2 \sqrt[3]{x^2}}$$

$$\text{g) } e^{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{h) } \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right)^2 \qquad \text{i) } 2^x x^2 \qquad \text{j) } x^{\frac{1}{x}}.$$

22. a) Laske  $(f^{-1})'(2)$ , kun  $f(x) = \sqrt{x-1}$ .

b) Määrää funktiolle  $f(x) = \ln x$  kohtaan  $x = e$  piirretyn tangentin yhtälö.

Vast: a) 4.

23. Tutki seuraavan funktion jatkuvuutta ja derivoituvuutta

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & , x \leq -1 \\ x + 1 & , -1 < x < 1 \\ x^2 + 1 & , 1 \leq x \leq 3 \\ 6x - 8 & , x > 3 \end{cases}$$

24. Määritä kolme ensimmäistä derivaattaa kohdassa  $x = 0$ ,

$$\text{kun } f(x) = \sqrt{x} + e^{x^2+1}.$$

Vast:  $\bar{A}$ .

25. Määritä  $f'(x_0)$ , jos  $y = f(x)$  on derivoituva funktio, joka on määritelty implisiittisesti seuraavilla yhtälöillä.

$$\text{a) } x^2 + 3xy + 2y^2 - 3 = 0, \quad x_0 = -1$$

$$\text{b) } \frac{x+y}{xy} + \frac{3}{4} = 0, \quad x_0 = -1.$$

$$\text{Vast: a) } -\frac{4}{5} \quad \text{b) } -16.$$

26. Laske raja-arvot (L'hospital)

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{x^2 - 2x + 1}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x} \qquad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^{3x} - 5x)}{x}$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(e^{3x} - 5x)}{x} \qquad \text{e) } \lim_{x \rightarrow 0} x^x.$$

$$\text{Vast: a) } -1 \text{ (Huom. } 2 \times \text{L'H)} \quad \text{b) } 1 \quad \text{c) } -2 \quad \text{d) } 3 \quad \text{e) } \bar{A}, \lim_{x \rightarrow 0^+} = 1.$$

27. Olkoon  $f(x) = \ln x$ , alkutilanne  $x_0 = e$  ja muuttujan  $x$  muutos  $\Delta x = 10$ . Mitä on tällöin funktion todellinen muutos  $\Delta f$  ja differentiaali  $df$ .

Vast:  $\Delta f = 1,5430$        $df = 3,6787$

28. Onko funktio

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y, & x < 1 \\ 2x + 2y, & x \geq 1 \end{cases}$$

jatkuva ja derivoituva.

Vast: On muualla paitsi kohdassa  $x = 1$ .

29. Määritä  $f_x$  ja  $f_y$  ja mahdollisesti  $f_z$ , kun

a)  $f(x, y) = 2x^5y - xy^3$

b)  $f(x, y) = x^y + y^x$

c)  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)^2$

d)  $f(x, y, z) = 2xy^2(y^3x + e^{2z})^2$ .

30. Määritä funktion  $f(x, y) = x^2y^5$  muuttujan  $x$  muutosta 0.5 ja muuttujan  $y$  muutosta -0.2 vastaava kokonaisdifferentiaali  $df$  pisteessä (1,2). Laske myös funktion arvon todellinen muutos  $\Delta f$ .

Vast:  $df = 16$        $\Delta f = 10.5$

31. a) Olkoon  $f(x, y) = x^2 - 3xy^2$ , missä  $x = uv$  ja  $y = u^2 + v^2$ .

Määritä  $\frac{\partial f}{\partial v}$ .

- b) Määritä  $\frac{\partial z}{\partial x}$  ja  $\frac{\partial z}{\partial y}$  ja niiden arvo pisteessä (0,0), kun  $z = f(x, y)$

toteuttaa yhtälön  $x^2z + y^2z + z^2 = 1$ .

Huom: Implisiittinen derivointi.

- c) Laske funktion  $f(x, y, z) = x^3e^{3y^2} + z^2$  toisen kertaluvun osittaisderivaatat.

Vast: b) 0



32. Tutki funktion  $f(x) = 2x^3 - 15x^2 - 84x + 11$  monotonisuutta.

33. Määrää seuraavien funktioiden suurin ja pienin arvo annetulla välillä

a)  $f(x) = x^2 e^{-x}$ ,  $[-3, 3]$ .

b)  $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2, & x < 0 \\ |-x + 2|, & x \geq 0 \end{cases}$ ,  $[-1, 3]$ .

Huom. käytä ääriarvon laatutarkasteluun derivaatan merkkikaaviota.

34. Määrää seuraavien funktioiden suurin ja pienin arvo annetulla välillä

a)  $f(x) = x^3 - 3x^2$ ,  $x \geq -1$ .

b)  $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}, & x \leq -1, \\ x + 1, & -1 < x < 2, \\ -\frac{1}{4}x^2 + x, & x \geq 2 \end{cases}$ ,  $[-4, 4]$ .

Vast:

a)  $\text{Min } f(-1) = f(2) = -4$

b)  $\text{Min } f(-4) = 7\frac{1}{2}$ .

Huom. käytä ääriarvon laatutarkasteluun derivaatan merkkikaaviota.

35. Määrää seuraavien funktioiden suurin ja pienin arvo annetulla välillä

a)  $f(x) = x^3 - 3x^2$ ,  $x \geq -1$ .

b)  $f(x) = x^2 e^{-x}$ ,  $[-3, 3]$ .

Huom. käytä ääriarvon laatutarkasteluun toista derivaattaa.

36. Määritä funktion  $f(x, y) = 10xy - 5x^2 - 7y^2 + 40x$  ääriarvot.

Vast:  $\max f(14, 10) = 280$ .

37. Määritä funktion  $f(x, y) = x^2 - y^2$  ääriarvot.

38. Määritä funktion  $f(x, y) = x^2 - 4x + 6y^2 + 1$  suurin ja pienin arvo joukossa  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 3 \text{ ja } |y| \leq 1\}$ .

Vast:  $\text{Max } f(0, -1) = f(0, 1) = 7$        $\text{Min } f(2, 0) = -3$ .

39. Määritä funktion  $f(x, y) = 10xy - 5x^2 - 7y^2 + 40x$  ääriarvot ehdolla  $x + y = 13$ .

Vast:  $\max f(8, 5) = 225$ .

Ohje: käytä Lagrangea.

40. Määritä funktion  $f(x, y) = 10xy - 5x^2 - 7y^2 + 40x$  ääriarvot joukossa

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0 \text{ ja } x + y \leq 13\}.$$

Vast:  $\min f(0, 13) = -1183$ ,  $\max f(8, 5) = 225$ .

41. Määritä funktion  $f(x, y) = 10xy - 5x^2 - 7y^2 + 40x$  maksimiarvo ehdolla  $x + y \leq 13$ .

Vast:  $f(8, 5) = 225$ .

Ohje: käytä Kuhn-Tuckeria.