Matematiikan perusmetodit I/Mat

HARJOITUKSIA, SYKSY 2008

1. Johda yhtälön $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ ratkaisukaava. Tarkastele ensin esimerkkinä yhtälöä $x^2 + 5x + 6 = 0$.

2. Mitä alkioita kuuluu joukkoon $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = -1\}$?

3. Olkoon $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{1}{1+x} < 1 + x\}$ ja $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -2\}$. Osoita, että $A \subset B$.

4. Osoita, että joukot $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x - 2 < 0\}$ ja $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 2\}$ ovat samat. Määrää A:n komplementti A^C.

5. Olkoon $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ on parillinen kokonaisluku}\}$ ja $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 \text{ on parillinen kokonaisluku}\}$. Osoita, että $A = B$.

6. Olkoon $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ on parillinen kokonaisluku } \}$ ja $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \text{ on parillinen kokonaisluku } \}$. Onko $A = B$?

7. Olkoon $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ja $B = \{2, 4, 7, 9\}$. Määrää $A \cap B$ ja $A \cup B$.

8. Olkoon $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < \dfrac{x-2}{x+3} < 1\}$ ja $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5x + 4 < 0\}$. Esitä mahdollisimman yksinkertaisesti lukujoukot $A \cup B$ ja $A \cap B$ muodossa $\{x \in \mathbb{R} \mid P(x)\}$.

9. Olkoot $A = \{1, 2, 3, ..., 50\}$ ja $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x = n^2 + 1$ jollain $n \in \mathbb{N}\}$. Määrää $A \cap B$.

10. Osoita, että

    a) $A \cup A^C = E$ b) $A^{CC} = A$.

11. Todista De Morganin laki

    $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$.

12. Oletetaan, että $A \subset B$. Osoita, että $B^C \subset A^C$.

13. Olkoon $A = \{n \in \mathbb{Z} | n > 3\}$ ja $B = \{n \in \mathbb{Z} | n^2 < 5\}$.

    Laske $A^C, A \cup B, A \cap B$ ja $B \setminus A$.

14. Olkoon $A = \{x \in \mathbb{R} | \ |x| < 1\}$. Laske A^C ja $A \times A^C$.

15. Olkoot $A = \{1, 4, 6, 8, 10, 11\}$ ja $B = \{2, 3, 4, 5, 8, 10\}$. Määrää $A \cap B$ ja $A \cup B$.

16. Olkoot $A = \{x \in \mathbb{R} | -2 < x \leq 8\}$ ja $B = \{-2, 0, 2, 4, 7\}$. Määrää $A \cap B$ ja $A \cup B$.

17. Ratkaise epäyhtälö

    a) $|x + 4| \leq 4$ b) $|2x| > |5 - 2x|$ c) $\left|1 + \frac{1}{x}\right| < 1$

    d) $|x + 1| < x$ e) $|x| + |x + 1| < 2$ f) $\frac{1}{1-2x} \leq \frac{1}{1+x}$.

18. Olkoot $A = \{1, 3, 5, 7\}$ ja $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Laske
    a) $A \cup B$, b) $A \setminus B, B \setminus A$ c) Mitä voit sanoa joukoista A^C ja B^C?

19. Olkoot $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x + 3 < 0\right\}$ ja $B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0, \quad \dfrac{1}{x} < -1\right\}$.

    Laske a) $A \cap B$, b) B^C, c) $A \setminus B$.

20. Osoita, että $A \subset B$, jos ja vain jos $A \cup B = B$.

21. Olkoon $A = \{x \in \mathbb{R} | \ 0 < \dfrac{x-1}{x+4} < 2\}$. Laske A^C ja $A \times A^C$.

22. Olkoot $A = \left\{n \in \mathbb{Z} \mid \ n^2 < 5\right\}$ ja $B = \left\{n \in \mathbb{Z} \mid \ n \neq 0, \ \left|n - \dfrac{4}{n}\right| < 3\right\}$.

    Laske $A \times B$ ja $B \times A$.

23. Olkoot $A = \{(k, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid k + n \geq 2\}$ ja
    $B = \{(0, 0), (1, 2), (2, -1), (3, -4), (3, 4)\}$.
    Laske a) A^C, b) $A \cap B$, c) $B \setminus A$.

24. Ratkaise epäyhtälöt

a) $|x-1|+|x+1|<4$ b) $x^2-4x \geq 2$

c) $|x^2-4x|<3$ d) $|2x-1|<|5x-3|$.

25. Todista oikeaksi tai vääräksi väite

$10^5\sqrt{n^3+700}+10^6 n+10^7 > n^2 \qquad \forall n \in \mathbb{Z}_+$.

26. Todista induktiolla seuraavat väitteet:

a) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$, b) $\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

c) $\sum_{i=1}^{n} 3^{2i-1} = \frac{3(9^n-1)}{8} \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+$.

27. Osoita, että $(1-\frac{1}{n^2})^n \geq 1-\frac{1}{n}$, kun $n \in \mathbb{N}$ ja $n \geq 2$ (vihje: käytä Bernoullin epäyhtälöä).

28. Joukossa E on n alkiota. Todista induktiolla, että E:n kaikkien osajoukkojen joukossa $P(E)$ on 2^n alkiota.

29. Todista tarkasti väite: $\frac{x}{2}+1 \geq \sqrt{x+1} \;\; \forall x \geq -1$.

30. Tutki ovatko seuraavat väitteet tosia ja todista ne siinä tapauksessa.

a) $n^3-500n-90 < \sqrt{70n^5+900} \;\; \forall n = 1, 2, \ldots$

b) luku n^2-1 on jaollinen kolmella aina, kun n on parillinen positiivinen kokonaisluku.

31. Todista, että n^3-n on jaollinen kolmella aina, kun n on kokonaisluku.

32. Osoita, että luku n^2-1 on jaollinen kolmella aina, kun $n>3$ on alkuluku (jaoton).

33. Osoita, että $n^3+1 \geq n^2+n$ aina, kun $n \in \mathbb{N}$.

34. On n taloa, joista jokainen halutaan kytkeä puhelinkaapelilla toisiinsa (kytkentä = kahden talon välinen kaapeli). Kuinka monta kytkentää tarvitaan?

35. Todista induktiolla seuraavat väitteet:

$$\text{a) } 1+\sum_{k=1}^{n} k\cdot k! = (n+1)!, \quad \text{b) } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n} \text{ aina kun } n = 1, 2, \ldots .$$

36. Osoita induktiolla, että n-kulmion kulmien summa$=(n-2)180°$.

37. Todista induktiolla seuraavat väitteet

a) $\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$, aina, kun $n \in \mathbb{Z}_+$,

b) $n^3 \geq 3n+3$ aina, kun $n \in \mathbb{Z}_+,\ n \geq 3$,

c) luku $2^{2n} + 15n - 1$ on jaollinen luvulla 9, kun $n \in \mathbb{Z}_+$.

38. Osoita, että $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$ (vihje: tutki lauseketta $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2$).

39. Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$(a+b+c)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}) \geq 9.$$

40. a) Todista, että $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$ aina, kun $x > 0$.

b) Todista a)-kohtaa käyttäen, että $(a+b+c)(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}) \geq 9$ aina, kun a, b ja c ovat positiivisia reaalilukuja.

41. Olkoon $a < b$ sekä $A = \frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2)$ ja $B = \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$. Osoita, että $A < B$.

42. Tutki lukujen $m+n$ ja mn parillisuutta, kun $m, n \in \mathbb{Z}$.

43. a) Osoita, että kahden rationaaliluvun summa, tulo ja erotus ovat myös rationaalilukuja.

    b) Olkoon $x \in \mathbb{R}$ irrationaaliluku. Osoita oikeaksi tai vääräksi väite:

    $\dfrac{x-1}{x+1}$ on irrationaalinen.

44. Oletetaan: $n, m \in \mathbb{Z}$ ja $m^2 + n^2$ on parillinen. Osoita, että $m + n$ on parillinen.

45. Ratkaise kaikki sellaiset $x, y \in \mathbb{Z}$, että $x^2 - y^2 = 1$

46. Esitä muodossa $\frac{m}{n}$ luvut

    a) $0,\overline{15}$ b) $2,34\bar{2}$ c) $\frac{1}{1,\overline{27}}$.

47. Määrää jaksollisten desimaalilukujen 1, 35 35 ... ja 2, 351 351... käänteisluvut muodossa $\dfrac{m}{n}$, missä $m, n \in \mathbb{Z}_+$.

48. Tiedetään, että $|a| \leq 2$ ja $|b| \leq 7$. Arvioi lukua $|4a + b|$ ylöspäin.

49. Osoita kolmioepäyhtlöä käyttäen, että

    a) $|x-1| \geq 1$ aina, kun $|x| \geq 2$, b) $|x^2-4| < 5$ aina, kun $|x-2| < 1$,

    c) $|4x + 7| + |4x - 1| \geq 8$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, d) $\left|\dfrac{2+x}{2-x}\right| < 2$ aina, kun $|x| < \dfrac{1}{2}$.

50. Osoita, että epäyhtälö

$$\sqrt{(x+2)^2 + |y^2 - 4| + (2x-1)^2 - 1} \geq 2$$

on voimassa kaikilla x:n ja y:n reaaliarvoilla. Milloin yhtäsuuruus on voimassa?

51. Todista: Jos $0 < a < b$, niin

$$a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b.$$

52. Ratkaise epäyhtälöt

a) $|x-1|+|x|<2$, b) $x^2-4x \geq 2$, c)$|x^2-4x|<3$,

d) $|5x+1|<|3x-1|$, e) $2x-\dfrac{x^2}{2}<|x|+|x-2|$.

53. Todista induktiolla, että

a) $1\cdot 5+2\cdot 5^2+3\cdot 5^3+...+n\cdot 5^n=\dfrac{5+(4n-1)5^{n+1}}{16}$ $\forall n \in \mathbb{Z}_+$,

b) $|\sum\limits_{j=1}^{n} a_j| \leq \sum\limits_{j=1}^{n} |a_j|$ $\forall n \in \mathbb{Z}_+$ ja mille tahansa reaaliluvuille $a_1,\ a_2, ...,$

c) $\underset{j=2}{\overset{n}{\pi}}(1-\dfrac{1}{j^2})=\dfrac{n+1}{2n}$, $n=2,3,...$.

54. Todista induktiolla

a) $\sum\limits_{j=1}^{n} j^3=[\frac{n(n+1)}{2}]^2 \quad n=1,2,...$

b) $\prod\limits_{j=2}^{n}(1-\frac{1}{j})=\frac{1}{n} \qquad n=2,3,...$

55. Olkoon $a_n=\displaystyle\sum_{k=n}^{n+2} k^2$.

a) Osoita todeksi väite: jos luku a_n on jaollinen kolmella, niin myös a_{n+1} on jaollinen kolmella.

b) Tutki milloin a_n on jaollinen kolmella.

56. a) Osoita suoraan laskemalla, että **binomikertoimille** $\binom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ on aina voimassa

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}=\binom{n+1}{k}, \qquad n,k \in \mathbb{Z}_+,\ k \leq n$$

b) Todista induktiolla kaava

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k \qquad \forall n \in \mathbb{Z}_+,\ x \in \mathbb{R}$$

c) Todista b-kohdan perusteella ns. **binomikaava**

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}, \qquad n \in \mathbb{Z}_+,\ a, b \in \mathbb{R}.$$

57. Osoita kolmioepäyhtälöä käyttäen, että

a) $|3x+2| + |3x-2| \geq 4$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$,

b) $\left|\frac{2+x}{2-x}\right| > \frac{1}{2}$ aina, kun $|x| < \frac{1}{2}$.

58. Olkoon $a > 0$, $|x-1| < a$ ja $|y-1| < a$. Osoita, että $|x-y| < 2a$.

59. Olkoot $u > 0$ ja $v > 0$ sekä $|x-a| < u$ ja $|y-b| < v$. Osoita, että

a) $|x+y-(a+b)| < u+v$, b) $|x-y-(a-b)| < u+v$.

60. Olkoon $\varepsilon > 0$ sekä $|x-a| < \varepsilon$ ja $|y-b| < \varepsilon$. Osoita, että $|xy-ab| \leq (|a|+|b|+\varepsilon)\varepsilon$.

61. Muodosta joukon

a) $\{a, b\}$, b) $\{a, b, c\}$, c) $\{a, b, c, d\}$

kaikki osajoukot.

62. Tutki, onko seuraavissa päättelyissä jokin virhe ja jos on, niin missä: $x = y \Rightarrow x^2 = xy \Rightarrow x^2 - y^2 = xy - y^2 \Rightarrow (x+y)(x-y) = y(x-y) \Rightarrow x + y = y \Rightarrow 2y = y \Rightarrow 2 = 1$.

63. Määrää $\min S, \max S, \inf S$ ja $\sup S$ mikäli mahdollista, kun

a) $S =]0,1[\cup [2,3]$

b) $S = \{n - \dfrac{1}{n} | n \in \mathbb{Z}_+\}$

c) $S = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty}]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$

d) $S = \{\lambda \in \mathbb{R} |$ yhtälöllä $x^2 - \lambda x + 2 = 0$ ei ole reaalista ratkaisua$\}$.

64. Osoita, että joukon S supreemum on yksikäsitteinen, mikäli se on olemassa.

65. Osoita, että max $(-S)$ = -min S ja $\sup(-S)$ = -inf S (mikäli olemassa).

66. Ovatko seuraavat funktiot injektioita tai surjektioita:
(i) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad f(x) = x + 2$ (ii) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad f(x) = x + 2$
(iii) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad f(x) = 2x$ (iv) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 2x.$

67. Kirjoita määritysjoukko D_f, kun

a) $f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \sqrt{3x-2},$

b) $f(x) = \sqrt{|x| - \sqrt{|x| - x^2}}$

68. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2+1$ ja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x+1$. Määrää $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ ja $g \circ g$.

69. Määritellään funktio f asettamalla

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{kun } |x| \le 1 \\ \dfrac{1}{x}, & \text{kun } |x| > 1 \end{cases}$$

a) Määrää D_f ja R_f ja piirrä kuvaaja.

b) Määrää $f \circ f$.

c) Ratkaise epäyhtälö $-\frac{1}{2} < f(x) < \frac{1}{2}$.

70. Olkoon $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \ge 0\}$ ja $f : B \to B$, $f(x) = \dfrac{2}{x+1}$. Osoita, että f on aidosti vähenevä. Määrää f:n arvojoukko R_f ja määrää $f^{-1} : R_f \to B$.

71. Osoita, että injektiivisyyden ehto

1° $x_1, x_2 \in D_f, \quad x_1 \ne x_2 \Rightarrow f(x_1) \ne f(x_2)$
on yhtäpitävä ehdon

2° $x_1, x_2 \in D_f, \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ kanssa.

72. Tutki seuraavien funktioiden surjektiivisuutta ja injektiivisyyttä:

a) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = 2x - 1$, b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$,

c) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $f(x) = x^2$,
d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

73. Olkoon $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$.
    a) Tutki, onko f surjektio tai injektio.
    b) Määrää R_f ja $f^{-1} : R_f \to \mathbb{R}$.

74. Olkoon $a > 0$ ja f reaalifunktio, joka toteuttaa ehdon $f(x+a) = \dfrac{1}{2} + \sqrt{f(x) - (f(x))^2}$ aina, kun $x \in \mathbb{R}$. Osoita, että f on jaksollinen funktio, jonka jakso $= 2a$ (on siis osoitettava, että $f(x) = f(x+2a)$ aina, kun $x \in \mathbb{R}$).

75. Olkoon f jaksollinen funktio ja $\omega > 0$ sen perusjakso. Osoita induktiolla, että $n\omega$ on f:n jakso aina, kun $n \in \mathbb{Z}_+$.

76. Bijektio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ toteuttaa yhtälön

    $$f(f^{-1}(x) + x) = f(2x) \;\; \forall x \in \mathbb{R}.$$

    Määrää funktio f.

77. Olkoot $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Osoita
    a) Jos $(f \circ g)(x) = x \;\; \forall x \in \mathbb{R}$, niin f on surjektio.
    b) Jos $(g \circ f)(x) = x \;\; \forall x \in \mathbb{R}$, niin f on injektio.
    c) Jos edellisten kohtien molemmat ehdot ovat voimassa niin $f^{-1} = g$.

78. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijektio ja $g(x) = 2f(x) + 1$. Osoita, että myös $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on bijektio.

79. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funktio, joka toteuttaa yhtälön

    $$(f(x))^3 + f(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

    a) Osoita, että f on injektio,
    b) Osoita, että f on surjektio,
    c) Määrää $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

80. Olkoot $f(x) = \sqrt{x+1}$ ja $g(x) = x^2 - 1$. Ratkaise yhtälö $(f \circ g)(x) = g(x)$.

81. Olkoot $f(x) = \frac{1}{x}$ ja $g(x) = |x+1|$. Määrää $\mathcal{D}_{f\circ g}$, ja ratkaise epäyhtälö $(f \circ g)(x) > g(x)$.

82. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijektio ja $g(x) = 7f(x)+8$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Osoita, että g on bijektio:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

83. Olkoot f ja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funktioita. Mitä voidaan sanoa yhdistetystä funktiosta $g \circ f$, kun

 a) f ja g ovat kasvavia,

 b) f ja g ovat väheneviä,

 c) f on kasvava ja g on vähenevä,

 d) f on vähenevä ja g on kasvava.

84. Laske $P(0)$, kun polynomin $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 0-kohdat ovat -1,1 ja 2.

85. Olkoon P astetta n oleva polynomi ja $P(k) = 2$ kun $k = 1, 2, ..., n$. Millä ehdolla $P(0) = 1$?

86. Tiedetään, että r-säteisen kiekon ala $= \pi r^2$ ja kehän pituus $= 2\pi r$. Johda kulmaa $\theta, 0 < \theta < 2\pi$, vastaavan sektorin alan ja kaarenpituuden lausekkeet.

87. Määrää $\sin x$ ja $\cos x$, kun x on

 a) $n \cdot \dfrac{\pi}{4},\ n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,$ b) $n \cdot \dfrac{\pi}{3},\ n = 1, 2, 4, 5,$

 c) $n \cdot \dfrac{\pi}{6},\ n = 1, 5, 7, 11.$

88. Määrää kaikki x:n arvot, kun

 a) $\sin x = \dfrac{1}{2}$, b) $\cos x =$ - 1, c) $\cos x =$ - $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, d) $\tan x = 1$,

 e) $\tan x =$ -1, f) $\sin 2x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, g) $\tan 3x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

89. a) Muunna radiaaneiksi kulmat $\alpha = 60°,\ \alpha = -45°,\ \alpha = 120°$.

 b) Muunna asteiksi kulmat $\alpha = \frac{3\pi}{4},\ \alpha = \frac{\pi}{5}$.

90. Määrää

a) $\sin 2x$, b) $\cos 2x$, c) $\tan 2x$, kun $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ja $\sin x = \frac{4}{5}$.

91. a) Osoita, että $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$.

b) Laske $\sin \frac{x}{2}$, kun $\tan x = \frac{12}{5}$ ja $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$.

92. Olkoon $\tan \frac{x}{2} = t$. Osoita, että $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ ja $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

93. Todista identiteetit

a) $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \cos(2\alpha)$

b) $\frac{1-\cos \alpha}{\sin \alpha} = \tan \frac{\alpha}{2}$

94. Ratkaise yhtälö

a) $\cos x = \sqrt{3} \sin x$, b) $\sin 2x = \cos x$, c) $\sin 3x = \cos 2x$,

d) $\cos 2x = 2\cos x - 1$, f) $\sqrt{3}(\cos^2 x - \sin^2 x) - 2\sin x \cos x = 0$.

95. Määrää $\sin(x+y)$, kun $\sin x = \frac{3}{5}$ ja $\cos y = \frac{7}{25}$ ja $0 \leq x \leq 2\pi,\ 0 \leq y \leq 2\pi,\ x \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ja $y \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

96. Ratkaise yhtälöt

a) $\tan x = 2\sin x$, b) $1 + \sin(3x) = (\sin x + \cos x)^2$,

c) $\cos(7x) = \cos x$, d) $\sin x \cos x = \frac{1}{2}$, e) $\sin(3x) = \cos x$.

97. Ratkaise epäyhtälö

a) $\cos x + \sin 2x < 0$, b) $\sin x > \frac{1}{1+2\sin x}$, c) $\sin x + \cos x > 1$.

98. Kolmion kulmat ja niiden vastaiset sivut ovat α, β, γ ja a, b, c.

a) Todista sinilause: $\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$.

b) Todista kosinilause: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

c) Laske a, kun $b = 2,\ c = 3$ ja $\beta = \pi/6$.

99. Ratkaise

a) $\frac{2}{|2\sin x + 1|} < 1$, b) $\sin x > \cos 2x$, c) $\sin 2x > \cos x$,

d) $\cos 2x - \tan x > 1$, e) $2\sin^2 x = 1 - \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

100. Osoita, että kompleksiluvuille z ja w

a) $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$, b) $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$, c) $\bar{\bar{z}} = z$,

d) $z\bar{z} = |z|^2$, e) $|z| = |\bar{z}|$, f) $|zw| = |z||w|$

g) $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|} (w \neq 0)$, h) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ i) $wz = 0 \Leftrightarrow w = 0$ tai $z = 0$ (tulon nollasääntö).

101. Esitä kompleksiluvut $(1+2i)(1-3i)$ ja $\dfrac{1+i}{5+2i}$ muodossa $x+yi$.

102. Esitä muodossa $a+bi$ kompleksiluvut

a) $(1+4i)(2-5i)$ b) $\frac{1+2i}{4-i}$ c) $(1+2i)^2$ d) $(1+2i)^{-2}$.

103. Määrää kompleksilukujen $\dfrac{1+i}{4+3i}$ ja $\cos\alpha + i\sin\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$, itseisarvot.

104. Millä reaaliluvun x arvoilla lauseke $\dfrac{z^2}{z-6i}$ on reaalinen, kun $z = x+3i$.

105. Ratkaise $z = x+yi$ yhtälöstä $|z| - z = 1+2i$.

106. Olkoon $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ reaalikertoiminen polynomi. Osoita: Jos $z \in \mathbb{C}$ on $P(x)$:n nollakohta, niin myös $\bar{z}$ on $P(x)$:n nollakohta.

107. Esitä kompleksiluvut $\sqrt{3}+3i, -2+2i, -\sqrt{3}-i$ ja $1-i$ muodossa $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

108. Laske a) $(\sqrt{3}+i)^{30}$, b) $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right)^{321}$.

109. Ratkaise yhtälö a) $z^3 = 1$, b) $z^4 = -1$.

110. Esitä $\sin 3\alpha$ ja $\cos 3\alpha$ lausekkeiden $\sin\alpha$ ja $\cos\alpha$ avulla (vihje: Käytä de Moivre'n kaavaa).

111. Osoita, että kompleksiluvulle on voimassa

a) $|z+w| \leq |z|+|w|$ b) $|z+w|^2+|z-w|^2 = 2(|z|^2+|w|^2)$.

Tulkitse tulokset geometrisesti.

112. Ratkaise yhtälö $z^3 = -1+i$.

113. Ratkaise yhtälöt

a) $|z+\frac{1}{z}| = 0$ b) $z+2\bar{z} = 3-i$ c) $z^6 = -1$

114. Tutki, mitä esittävät kompleksitasossa joukot $(z = x+iy)$:

a) $z = \frac{2+i}{2-i}\bar{z}$

b) $|x-2+(y-1)i| \leq 3$.

115. Todista induktiolla, että

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(2j-1)(2j+1)} = \frac{n}{2n+1}, \ \forall n \in \mathbb{Z}_+.$$

116. Olkoon $x_0 = 1$ ja $x_{n+1} = 1+\frac{1}{2}x_n$, kun $n \in \mathbb{N}$. Todista induktiolla, että $x_n = 2-\left(\frac{1}{2}\right)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

117. Ratkaise epäyhtälöt

a) $\dfrac{1}{x-1} > 1+x$, b) $8x > \dfrac{1}{x^2}$,

c) $\dfrac{x}{x+2} > \dfrac{x+3}{3x+1}$, d) $\dfrac{|x|+1}{|x|-1} < 2$.

118. Ratkaise epäyhtälö

a) $3|x|-3 < x+1$, b) $2|x|+|x-2| < 5$,

c) $\left|1+\frac{1}{x}\right| < 1$, d) $\frac{1}{|x|-1} < 3$.

119. Todista kolmioepäyhtälöä käyttäen, että

a) $\left|x+\frac{1}{100}\right| + \left|x-\frac{99}{100}\right| \geq 1$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

b) $\left|\frac{1+x}{1-x}\right| > \frac{1}{3}$ aina, kun $|x| < \frac{1}{2}$.

120. Määrää määritysjoukko D_f, kun $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{1-x} - 1 - x}$.

121. Olkoot $f(x) = \sqrt{x+1}$ ja $g(x) = x^2 - 1$. Määrää $(f \circ g)(x)$ ja $(g \circ f)(x)$ sekä määritysjoukot $D_{f \circ g}$ ja $D_{g \circ f}$. Ratkaise yhtälö $(f \circ g)(x) = g(x)$.

122. Osoita, että ehdolla $x + y + z = \pi$ on $\sin 2x + \sin 2y + \sin 2z = 4 \sin x \sin y \sin z$.

123. Ratkaise yhtälö $4 \sin^2 x - \tan x = 0$.

124. Osoita, että $f(x) = x|x|, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on bijektio.

125. Funktiolla $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x^3 + x$, on käänteisfunktio. Määrää $f^{-1}(3)$.

126. Määrää reaali- ja imaginaariosat, kun

a) $z = i(2 + 3i)(1 - 2i)$

b) $z = \dfrac{1 - 4i}{2 + i}$.

127. Esitä napakoordinaateissa kompleksiluvut

a) $z = 5$ b) $z = -7$ c) $z = -2 - 2i$ d) $\sqrt{3} + i$.

128. Ratkaise kompleksiset yhtälöt

a) $z^3 + z = 0$ b) $z + 2\bar{z} = 5$ c) $2z + |z| = i$.

129. Määrää reaali- ja imaginaariosat luvulle $(\sqrt{3} + i\sqrt{3})^{52}$.

130. Ratkaise napakoordinaattien avulla yhtälöt

a) $z^3 = 1 + i$ b) $z^5 = 1$.

131. Ratkaise

a) $z^2 - 2\bar{z} + 1 = 0$ b) $|\bar{z} + iz| < 2$.

132. Lue monisteen sivu 54.

133. Jaa polynomi $P(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$ tekijöihin

a) kunnassa $\mathbb{R}$, b) kunnassa $\mathbb{C}$.

134. Olkoon $P(x) = 2x^4 + 7x^3 + 14x^2 + 63x - c,\ c \in \mathbb{R}$.

a) Määrää luku c, kun P:n yksi nollakohta on $3i$.

b) Jaa polynomi P tekijöihin

i) kunnassa $\mathbb{R}$,

ii) kunnassa $\mathbb{C}$.

135. Polynomin $P(x) = x^3 - 9x^2 + 9x + c$ yksi nollakohta on 2. Jaa $P(x)$ tekijöihin

a) kunnassa $\mathbb{R}$, b) kunnassa $\mathbb{C}$.

136. Polynomin $P(x) = x^3 - 2x^2 + 9x + c$ yksi nollakohta on 2. Jaa $P(x)$ tekijöihin

a) kunnassa $\mathbb{R}$, b) kunnassa $\mathbb{C}$.

137. Olkoot $z_1 = i, z_2 = 2 + i$ ja $z_3 = -3$. Määrää sellainen alinta astetta oleva

a) reaalikertoiminen polynomi, jonka nollakohtia ovat z_1, z_2 ja z_3.

b) kompleksikertoiminen polynomi, jonka nollakohtia ovat z_1, z_2 ja z_3.

138. Olkoot $z_0, z_1, ..., z_{n-1}$ yhtälön $z^n = 1$ ratkaisut, kun $n \in \mathbb{Z}_+, n \geq 2$. Osoita, että $\sum\limits_{k=0}^{n-1} z_k = 0$.

139. Johda toisen asteen yhtälön $z^2 + a_1 z + a_0 = 0, \quad a_0, a_1 \in \mathbb{C}$, ratkaisukaava.

140. Osoita tarkasti, että

a) $\lim\limits_{x \to 2} (11x - 18) = 4$ b) $\lim\limits_{x \to x_\circ} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x_\circ}$, kun $x_\circ \neq 0$.

141. Laske raja-arvot

a) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{2n + 7}{n^3 + 2}$ b) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n^2 + n + 1}{2n^2 + 3}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$ d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin(n)}{n}$.

142. Laske raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right).$$

143. Määrää $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, kun x_n on

a) $\dfrac{2n^2+n-3}{n^2+1}$, b) $\dfrac{(n+1)^2-(n-1)^2}{n}$, c) $n(\sqrt{n^2+1}-n)$,

d) $n^2(n-\sqrt{n^2+\frac{1}{n}})$, e) $\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(2n)^2}$, f) $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+k}}$.

144. Osoita tarkasti, että $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{1+n^2}=0$.

145. Osoita tarkasti, että $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{1+n^2}}=1$.

146. Todista: Jos lukujono (a_n) suppenee, niin raja-arvo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ on yksikäsitteinen.

147. Olkoon jono $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ vähenevä ja alhaalta rajoitettu lukujono, ja olkoon $\inf\{a_n\}=a$. Osoita, että jono (a_n) suppenee ja $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$.

148. Lue monisteen sivut 59-61.

149. Määrittele käsitteet sarjan $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_n$ osasumma, suppeneminen ja summa.

150. Tutki seuraavien sarjojen suppenemista ja laske summa, mikäli mahdollista:

a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}$ (teleskooppisarja), b) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a^k$ (geometrinen sarja).

151. Pallo ponnahtaa tiputettuna lattiasta niin, että se saavuttaa 90% pudotuskorkeudesta. Laske pallon kulkema kokonaismatka, kun pallo tipautetaan 1 m:n korkeudesta ja annetaan pomppia kunnes se pysähtyy.

152. Osoita osasummien jonoa tutkimalla, että sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{k}}$ hajaantuu.

153. Oletetaan, että sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ suppenee. Osoita, että $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. (vrt. teht. 152; käänteinen väite ei pidä paikkaansa).

154. Lue monisteen sivut 63-64.

155. Osoita kahdella tavalla, että

a) $0{,}121212... = \frac{4}{33}$ (jakso=12), b) $0{,}999... = 1$ (jakso=9).

156. Osoita, että jono (a_n) suppenee ja määrää $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, kun

a) $a_1 = 1$ ja $a_{n+1} = \frac{1}{6}(a_n^2 + 9),\ n \in \mathbb{Z}_+$,

b) $a_1 = 1$ ja $a_{n+1} = \frac{3a_n}{1+a_n},\ n \in \mathbb{Z}_+$.

157. Osoita, että sarja suppenee, ja laske sen summa

a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1+2^{k+1}}{3^k}$

b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

158. Osoita, että funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on bijektio, jos se toteuttaa ehdon
a) $f(3f(x)) - x = 0$ aina, kun $x \in \mathbb{R}$,
b) $(f \circ f)(x) = 5x$ aina, kun $x \in \mathbb{R}$,
c) $(f \circ f)(x) = 2x + 1$ aina, kun $x \in \mathbb{R}$.

159. Olkoon $\varepsilon > 0$ ja $\delta_\varepsilon = \min(\frac{3}{2}, \frac{9\varepsilon}{2})$. Osoita, että
a) $\frac{1}{|x|} \leq \frac{2}{3}$ aina, kun $0 < |x - 3| < \frac{3}{2}$.
b) $|\frac{1}{x} - \frac{1}{3}| < \varepsilon$ aina, kun $0 < |x - 3| < \delta_\varepsilon$.

160. Olkoon $\lim_{x \to x_0} f(x) = a < 0$. Osoita, että on olemassa sellainen aito ympäristö $B'_\delta(x_0)$, että $f(x) < \frac{a}{2} < 0$ aina, kun $x \in B'_\delta(x_0)$.

161. Olkoot $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ ja $\lim_{x \to x_0} g(x) = b$. Osoita, että
a) $\lim_{x \to x_0} (f(x)g(x)) = ab$ ja
b) $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$, jos $b \neq 0$,
c) jos $f(x) \leq g(x)$ x_0:n jossakin aidossa ympäristössä, niin $a \leq b$.

162. Määrää seuraavat raja-arvot:

1) $\lim_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x} - 2\sqrt{3}}{x^2 + 2}$ 2) $\lim_{x \to 5} \dfrac{x - 5}{x^2 - 4x - 5}$ 3) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 1}{x^6 - 1}$

4) $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 8}{|x| - 2}$ 5) $\lim_{x \to 2} \dfrac{x - \sqrt{2x}}{x^2 - 4}$ 6) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x + 1} - 1}{x}$

7) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x\sqrt{x} - x + \sqrt{x} - 1}{x - 1}$ 8) $\lim_{x \to 0+} \dfrac{\sqrt{3x} - \sqrt{2x}}{\sqrt{x}}$

9) $\lim_{x \to 1} \dfrac{1}{x - 1} \left(\dfrac{1}{x + 3} - \dfrac{2}{3x + 5} \right)$

10) $\lim_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x\sqrt{1 + x^2}} \right)$ 11) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + 2x} - \sqrt{1 - 2x}}{x + x^2}$

12) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin(13x^2)}{x^2}$

13) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sin(\pi x)}{x-2}$ 14) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin x - \sin 2x}{x^3}$

15) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x}$ 16) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\pi x + x^2)}{x}$

17) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(11x)\sin(10x)\sin(59x)}{x^3}$ 18) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{\sin 3x}$

19) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}$

20) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos 2x}{\cos(x+\frac{\pi}{4})}$ 21) $\lim\limits_{x\to 1} \sin(\frac{\pi}{2}[x])$

22) $\lim\limits_{x\to 1} [\sin(\frac{\pi}{2}x)]$ ($[x]$ = suurin kokonaisluku, joka $\leq x$).

163. Määrää sellainen vakio a, että funktiolla $f(x) = \dfrac{ax^2-6x+4}{x^2-x-2}$ on raja-arvo, kun $x \to 2$. Mikä ko. raja-arvo on?

164. Määrää sellaiset luvut $a, b \in \mathbb{R}$, että raja-arvo

$$\lim_{x\to 1} \frac{ax^2+bx+1}{x-1}$$

on olemassa. Laske tällöin kyseinen raja-arvo.

165. Laske raja-arvot

a) $\lim\limits_{x\to 4-} \dfrac{\sqrt{x}-2}{|x-4|}$, b) $\lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{|x|}{\tan x}$, c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^6+5x^2-1}{3x^6+8}$,

d) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$, e) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$, f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.

166. Määrää seuraavat raja-arvot

1) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{1+\cos x}{(x-\pi)^2}$, 2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+27}-3}{x}$, 3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x^2-2x}$,

4) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^2+x-2}$, 5) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-2x^2+x-2}{x^2-2x}$,

6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^2-1}{(1+x)^3-1}$, 7) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-1}{x^2-1}$, 8) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^2-1}$,

9) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3-27}{x-3}$, 10) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x-1}{x}$, 11) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos^2 2x-1}{x^2}$,

12) $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}$, 13) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x}{x}$, 14) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sin(x-3)}{x-3}$,

15) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{7x}$, 16) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin 8x}$, 17) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 7x}{\sin 4x}$,

18) $\lim\limits_{x\to 2\pi} \dfrac{1-\cos x}{(x-2\pi)^2}$, 19) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^4+x^2}\right)$,

20) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+2}}{x-1}$, 21) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 4x}{x}$, 22) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x}{\cos x \sin x}$,

23) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2\sin x - x^3}{x^3}$, 24) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$, 25) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{3+x}-2}{\sin(x-1)}$,

26) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{9x^3+12x^2+1991x-2112}{x-1}$, 27) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^3 x}{x^2}$,

28) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 3x - \cos 2x}{x^2}$, 29) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\cos x - 1)}{x^2}$.

167. Osoita tarkasti, että

a) $\lim\limits_{x\to 5}(3x-1) = 14$ b) $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$.

168. Määrää vakioille a ja b sellaiset arvot, että raja-arvo $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-ax-b}{x^2}$ on äärellisenä olemassa. Määrää k.o. raja-arvo.

169. Olkoon $a_1 = 99$ ja $a_{n+1} = \sqrt{7a_n}$, kun $n = 1, 2, \cdots$. Osoita, että lukujono (a_n)suppenee ja määrää $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

170. (Yo-tehtävä K2001)

Lukujonon termit ovat $a_1 = 1$, $a_2 = \sqrt{2}$, $a_3 = \sqrt{2\sqrt{2}}$, $a_4 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$, jne. Muodosta termeille rekursiokaava. Laske $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

171. (Yo-tehtävä S2001)

Tutki, millä $x \in \mathbb{R}$ sarja $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2x-1}{3x+1}\right)^k$ suppenee. Määritä summafunktio ja piirrä sen kuvaaja.

172. Osoita, että yhtälöllä $x^3 - 2x^2 - 3x + 1 = 0$ on täsmälleen
a) yksi negatiivinen ratkaisu
b) kaksi positiivista ratkaisua.
Piirrä ko. polynomifunktion kuvaaja.

173. Osoita, että jatkuvalla funktiolla $f : [0,1] \to [0,1]$ on kiintopiste ts. sellainen $x_0 \in [0,1]$, että $f(x_0) = x_0$.

174. Määrää sellainen luku $a \in \mathbb{R}$, että funktio
$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{kun } x \leq 2 \\ 2x + a, & \text{kun } x > 2 \end{cases}$$
on kaikkialla jatkuva.

175. Olkoon $f(x) = \dfrac{\cos x - \cos 2x}{x^2}$. Voidaanko $f(0)$ määritellä niin, että f tulee jatkuvaksi pisteessä 0?

176. Määrää sellaiset luvut $a, b \in \mathbb{R}$, että funktio
$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & , x < 0 \\ b & , x = 0 \\ \frac{\tan(ax)}{bx} & , x > 0 \end{cases}$$
on jatkuva origossa.

177. Osoita, että yhtälöllä $x^7 + x + 1 = 0$ on ainakin yksi reaalijuuri.

178. Tutki, onko yhtälöllä $x^3 - x^2 + 2x - 3 = |x - 2|$ yhtään ratkaisua.

179. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio, joka toteuttaa ehdon $|f(x) - x| \leq 1$ aina., kun $x \in \mathbb{R}$. Osoita, että funktiolla f on ainakin yksi nollakohta (vihje: käytä Bolzanon lausetta).

180. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio, joka toteuttaa ehdon $|(f(x))^3 + x + 2| < 1$, aina, kun $x \in \mathbb{R}$. Osoita, että funktiolla f on ainakin yksi nollakohta.

181. Osoita, että yhtälöllä $2x = \cos x$ on ratkaisu $x_0 \in \mathbb{R}$.

182. Olkoon
$$f(x) = \begin{cases} x & , x \in \mathbb{Q} \\ -x & , x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$
Tutki, missä pisteissä f on jatkuva.

183. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jatkuva ja $f(x) = x^2 - 1$, kun $x \in \mathbb{Q}$. Tutki, mikä funktio on kyseessä.

184. Olkoon

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & , x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

missä $x = \frac{p}{q} (q > 0)$ on supistetussa muodossa (sovitaan tässä $0 = \frac{0}{1}$). Tutki, missä pisteissä f on jatkuva.

185. Ratkaise x, kun

a) $ln\sqrt{x-1} + ln\sqrt{2x-1} = ln\sqrt{3}$ b) $log_2(log_2 x) = -1$

c) $e^{-2x+1} = 2$ d) $2 \cdot 4^x - 2^x > 1$.

186. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ln(\sqrt{1+x^2} - x)$. Osoita, että f on pariton funktio.

187. Onko $log_3 6$ rationaali - vai irrationaaliluku?

188. Määrää raja-arvot

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{4-x}-2}{x(x+1)^2}$, b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x+8}-2}{x^2+x}$, c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(51x)}{x}$,

d) $\lim\limits_{x \to \infty} (1 + \frac{1}{x})^{3x}$, e) $\lim\limits_{x \to \infty} (1 - \frac{1}{x})^x$, f) $\lim\limits_{x \to \infty} (1 + \frac{2}{x})^x$,

g) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{2x+1}{2x}\right)^x$,

h) $\lim\limits_{x \to \infty} (1 + \frac{1}{3x})^{2x}$, i) $\lim\limits_{x \to \infty} (\frac{x+3}{x-1})^{x+3}$, j) $\lim\limits_{x \to \infty} (\frac{2x+3}{2x+1})^{x+1}$,

k) $\lim\limits_{x \to \infty} x[\ln x - \ln(x+1)]$.

189. Laske $\overline{arc}\sin\left(\frac{1}{2}\right)$, $\overline{arc}\sin\left(-\frac{1}{2}\right)$, $\overline{arc}\sin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\overline{arc}\cos\left(\frac{1}{2}\right)$,

$\overline{arc}\cos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

$\overline{arc}\tan(-1), \overline{arc}\tan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\overline{arc}\cot(\sqrt{3})$, $\sin\left(\overline{arc}\cos\frac{4}{5}\right)$

$\sin(\overline{arc}\tan 3)$.

Nerous on prosentin verran inspiraatiota ja 99 % hikeä.

-Thomas Alva Edison-

190. Olkoon $f(x) = \sqrt{2x-1}$. Määrää $f'(5)$ suoraan derivaatan määritelmään nojaten.

191. Onko $f'(1)$ olemassa, kun

a) $f(x) = \begin{cases} x & , \text{ kun } x \leq 1 \\ 2x-1 & , \text{ kun } x > 1, \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} 2x^2-1 & , \text{ kun } x \geq 1 \\ 4x-3 & , \text{ kun } x < 1. \end{cases}$

192. Olkoon $f(x) = \dfrac{\sin|x|}{2+\cos x}$. Tutki, onko $f'(0)$ olemassa.

193. Osoita: Jos f ja g ovat derivoituvia pisteessä x_0 niin $f+g$ on derivoituva pisteessä x_0 ja $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

194. Olkoon

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , \text{ kun } x \geq 1 \\ \frac{2x^3}{3} & , \text{ kun } x < 1. \end{cases}$$

Määrää $f'(x)$, kun $x \neq 1$ ja $\lim\limits_{x\to 1-} f'(x)$ sekä $\lim\limits_{x\to 1+} f'(x)$. Tutki, onko f jatkuva pisteessä $x=1$ ja onko $f'(1)$ olemassa?

195. Määrää sellaiset vakiot a ja b, että fuktio

$$f(x) = \begin{cases} ax+b & , \text{ kun } x > 1 \\ 3x^2+4 & , \text{ kun } x \leq 1 \end{cases}$$

on derivoituva pisteessä $x=1$.

196. Oletetaan, että pisteen $x=0$ eräässä ympäristössä on voimassa

$$2\cos x \leq f(x) \leq 2 + x^2.$$

Määrää $f(0)$, ja osoita, että $f'(0)$ on olemassa ja määrää se.

197. Oletetaan, että $f'(a)$ on olemassa. Määrää

a) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{h}$, b) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{xf(a)-af(x)}{x-a}$.

198. Olkoon $f(x) = \dfrac{x+1}{2x+5}$. Laske $f'(2)$ suoraan derivaatan määritelmän nojalla.

199. Oletetaan, että pisteen $x = 0$ eräässä ympäristössä

$$1 - x^2 \leq f(x) \leq 1 + x^2.$$

Määrää $f(0)$. Osoita, että f on derivoituva pisteessä $x = 0$, ja laske $f'(0)$.

200. Kappaleen paikka hetkellä t on $s(t) = t + \frac{4}{1+t}$, $t \geq 0$. Missä kohdassa kappaleen nopeus on nolla? Milloin kappale on lähinnä origoa?

201. Tutki, millä vakioiden $a > 0$ ja $b > 0$ arvoilla käyrät $y = ax^2$ ja $y = \frac{b}{\sqrt{x}}$ leikkaavat toisensa kohtisuoraan.

202. Todista derivoimiskaavat $D(\cos x) = -\sin x$, $D(\tan x) = 1 + \tan^2 x$ ja $D(\cot x) = -(1 + \cot^2 x)$.

203. Määrää käyrän $y = x^2$ pisteen (1,0) kautta kulkevien tangenttien yhtälöt.

204. Derivoi $f(x)$, kun $f(x)$ on

a) $(x-1)(x+x^3)$, b) $\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$, c) $x^3 \sin x \cos x$,

d) $\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$, e) $x \ln x - x$, f) $x^5 \ln x$.

205. Derivoi $f(x)$, kun $f(x)$ on

a) $\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^4$, b) $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$, c) e^{e^x}, d) $\cosh x$, e) 2^{x^2-1},

f) $(\ln x)^{\ln\ x}$, g) $x^{\sin\ x}$, h) $(\overline{arc}\sin x)^2$, i) $\overline{arc}\sin \frac{1}{x}$,

j) $\overline{arc}\tan \sqrt{x}$, k) $\overline{arc}\tan \sqrt{e^x - 1}$, l) $\overline{arc}\tan(\ln x)$.

206. Osoita, että a) $D \sinh x = \cosh x$, b) funktiolla $f(x) = \sinh x$ on käänteisfunktio $f^{-1}(x) = ar \sinh x$ ja määrää sen derivaatta.

207. Osoita, että a) $D \tanh x = \frac{1}{\cosh^2 x}$, b) funktiolla $f(x) = \tanh x$ on käänteisfunktio $f^{-1}(x) = ar \tanh x$ ja määrää sen derivaatta.

208. Olkoon $f(x) = x^3 + 5x + 8$. Merkitään $h(y) = e^{f^{-1}(y)}$. Laske $h'(2)$.

209. Olkoon $y(1) > 0$ ja $x^3 - y^3 + xy - 1 = 0$. Laske $y'(1)$.

210. Osoita väliarvolauseen avulla, että

a) $\dfrac{1}{9} < \sqrt{66} - 8 < \dfrac{1}{8}$, b) $\dfrac{1}{6} < \ln 6 - \ln 5 < \dfrac{1}{5}$,

c) $\dfrac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$, kun $x > 0$,

d) $x - \dfrac{x^3}{3} < \overline{arc}\tan x < x \ \forall x > 0$.

211. Olkoon f derivoituva funktio, jolla $0 \le f'(x) \le 2$ aina, kun $x \in [0,2]$. Olkoon lisäksi $f(0) = 1$ ja $f(2) = 4$. Osoita, että $2 \le f(1) \le 3$.

212. Funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ toteuttaa ehdot: $f(1) = 1$ ja

$$|xf(x) - yf(y)| \le |x - y|^2 \qquad \forall x > 0, y > 0.$$

Määrää funktio f.

213. Määrää seuraavat raja-arvot

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1+\cos \pi x}{x^2 - 2x + 1}$, b) $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{\ln(\cos 3x)}{\ln(\cos 2x)}$, c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{e^{3x} - 1}$,

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$, e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\cot^2 x}$, f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\cos(7x) - 1)}{x^2}$,

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\sin x}{x^3} \right)$.

214. Osoita, että yhtälöllä $10x^4 - 6x + 1 = 0$ on juuri välillä [0,1]. (Opastus: tarkastele funktiota $f(x) = 2x^5 - 3x^2 + x$ ja sovella Rollen lausetta.)

215. Osoita, että yhtälöllä $10x^3 + 4x^2 - 7 = 0$ on tarkalleen yksi positiivinen juuri.

216. Määrää ne positiiviluvut a, joilla yhtälöllä $x + a\sin x - 2 = 0$ on ratkaisu x välillä $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

217. Olkoon $g(x) = \cos x, \pi \leq x \leq 2\pi$. Esitä $g^{-1} : [-1,1] \to [\pi, 2\pi]$ funktion $arc\cos$ avulla.

218. Todista identiteetti $arc\tan(\frac{y-1}{y+1}) + \frac{\pi}{4} = arc\tan y$, kun $y > -1$.

219. Piirrä funktion $f(x) = arc\sin(\sin x)$, $x \in \mathbb{R}$, kuvaaja (ilman laskinta).

220. Osoita väliarvolauseen avulla, että

a) $\sqrt{1+x} < 1 + \dfrac{x}{2} \quad \forall\, x > 0,$

b) $\cos x \geq 1 - \dfrac{x^2}{2} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$

221. Tutki miten yhtälön $x^3 - 3ax^2 + 2 = 0$ reaalisten ratkaisujen lukumäärä riippuu vakiosta $a \geq 0$.

222. Laske raja-arvot

a) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^2}$ c) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}-} \frac{2x-\pi}{\cos^2 x}$ d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos ax}{1-\cos bx}$.

223. Valmistetaan tasapaksusta aineesta astia, jonka pohja on neliö ja tilavuus 1. Astiaan tehdään kansi kalliimmasta materiaalista, jonka hinta on 15-kertainen pinta-alayksikköä kohden verrattuna muuhun osaan. Määrää astian mitat, kun materiaalikulut on saaava mahdollisimman pieniksi.

224. Olkoon $f(x) = x^7 + 2x^5 - 3,\ x \in \mathbb{R}$.

a) Osoita, että $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on olemassa.

b) Laske $(f^{-1})'(0)$.

225. Olkoon $f(x) = 2x + \sin\ x,\ x \in \mathbb{R}$.

a) Osoita, että $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on olemassa.

b) Laske $(f^{-1})'(2\pi)$.

226. Funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ toteuttaa ehdon

$$f(x) - f(y) = f'\left(\frac{x+y}{2}\right)(x-y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Määrää funktio f.

227. Osoita, että funktio $f(x) = x^2$ on alaspäin kupera suoraan määritelmän perusteella (ks. sivu 125 moniste).

228. Käytettävissä on 100 m aitaa sekä pitkä, suora muuri, jota voidaan käyttää osana aitausta. Rakenna mahdollisimman suuri aitaus, kun

a) Muuri ja aita muodostavat yhdessä suorakulmion.

b) Aita on osa jonkin ympyrän kehää.

229. Olkoon $f(x) = x-$ arc tan $(\tan x)$ $\forall x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \kappa$. Laske $f'(x)$ ja piirrä funktion kuvaaja.

230. Derivoi

a) $f(x) = \dfrac{(x+1)(x+4)}{\sqrt{x(x+2)}}$ b) $f(x) = \frac{(x+1)^2\sqrt{x-1}}{(x+4)^3e^x}$.

231. Integroi

a) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx$, b) $\int 2x(\sqrt{x}-1)dx$, c) $\int x(\sqrt{x}+2x\sqrt[3]{x})dx$,

d) $\int (1-\frac{1}{x})^2 dx$, e) $\int \frac{1}{x+3}dx$, f) $\int \frac{1}{2x+3}dx$, g) $\int \frac{x^2}{3+x}dx$,

h) $\int \frac{x}{x^2+8}dx$, i) $\int \frac{1}{1+a^2x^2}dx$, j) $\int \frac{dx}{2+x^2}$, k) $\int x\sqrt{1-x^2}dx$,

l) $\int \cos(6x)dx$, m) $\int \sin(4x+1)dx$, n) $\int \sin^5 x \cos x dx$,

o) $\int \sin^2 x dx$, p) $\int \cos^2 x dx$, q) $\int \sin^3 x dx$, r) $\int \cos^3 x dx$,

s) $\int \sin^5 x dx$, t) $\int \sin^4 x dx$, u) $\int \cos^4 x dx$, v) $\int \tan^2 x dx$,

x)$\int \frac{dx}{\sqrt{7x+5}}$, y)$\int \frac{1}{\tan x}dx$, z) $\int \frac{e^x}{e^x+1}dx$.

232. Määrää osittaisintegroinnin avulla

a) $\int xe^{2x}dx$, b) $\int xe^{-\frac{x}{2}}dx$, c) $\int x\sin x dx$, d) $\int x\ln x dx$,

e) $\int \ln x dx$, f) $\int \ln(x^2)dx$, g) $\int x^2 \sin x dx$, h) $\int x^2 \ln x dx$,

i) $\int \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}dx$, j) $\int (2x+1)\sin(2x)dx$, k)$\int \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}dx$,

l) $\int \ln(1+x^2)dx$, m) $\int \overline{arc}\tan x dx$, n) $\int \cos(\ln x)dx$,
o) $\int e^x \cos x dx$, p) $\int \overline{arc}\sin x dx$, q) $\int x^3 e^x dx$.

233. Johda osittaisintegroinnin avulla palautuskaavat

a) $\int \sin^n x\ dx = -\frac{1}{n}\ \sin^{n-1} x\ \cos\ x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\ dx$,

b) $\int \cos^n x\ dx = \frac{1}{n}\ \cos^{n-1} x\ \sin\ x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\ dx$
$(n = 2, 3, ...)$.

234. Integroi suluissa annettua sijoitusta käyttäen

a) $\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}dx$, $(x = 3\ \sin\ t,\ -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2})$,

b) $\int \frac{1}{1+\sqrt{x+1}}dx$ $(t = \sqrt{x+1})$,

c) $\int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx$ $(t = \sqrt[3]{x+1})$,

d) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$ $(x = t^6,\ t > 0)$.

235. Integroi

a) $\int \frac{x^2}{x^2+1}dx$, b) $\int \frac{dx}{x(x-1)}$, c) $\int \frac{1+x^2}{x(1+x)}dx$, d) $\int \frac{dx}{x^2+3}$,

e) $\int \frac{2x^2+8x-2}{(x-1)^2(x+1)^2}dx$, f) $\int \frac{x+1}{x^2-x+1}dx$, g) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x-1}}$,

h) $\int \sqrt{2-x^2}\ dx$, i) $\int \frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}dx$, j) $\int \frac{x}{(3x-1)\sqrt{3x-1}}dx$,

k) $\int \frac{x\ dx}{x+\sqrt{x}}$, l) $\int (e^{5x} - \sqrt{e^x})dx$, m) $\int x^2 e^{2x} dx$,

n) $\int \frac{dx}{e^x - e^{-x}}$, o) $\int \frac{dx}{3x^2-2x+1}$, p) $\int x\ \sin\ x\ \cos^3 x\ dx$,

q) $\int x\sqrt{1-x^2}$, r) $\int \frac{x^3-x}{x^2+1}dx$, s) $\int \frac{4^x+1}{2^x+1}dx$,

t) $\int \frac{x+3}{x^2+2x+1}dx$, u) $\int \sqrt{x^2+2}dx$.

236. Musiikissa, kuvataiteessa ja arkkitehtuurissa on antiikin ajoista lähtien käytetty ns. kultaista leikkausta. Se on jatkosuhde, jossa jana

jaetaan kahteen osaan niin, että lyhyemmän osan suhde pitempään on yhtä suuri kuin pitemmän suhde koko janaan. Olkoon janan pituus l, joka jaetaan kultaisen leikkauksen suhteessa. Laske osien pituudet.

237. Uutta matematiikkaa: Jos A sahaa puun poikki kolmessa tunnissa, B kahdessa tunnissa ja C yhdessä tunnissa - niin miksi ihmeessä koko hommaa ei anneta C:lle? Mitä tämä tarkoittaa laskuharjoituksiin sovellettuna?

238. Haet Korvatunturin tuotekehittelyosastolta matemaatikon paikkaa. Työhönottohaastattelussa saat Joulupukilta tehtäväksi suunnitella joulukuusenkoristeen, jonka käyrä

$$y = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & 0 \leq x \leq 4 \\ \sqrt{4-(x-4)^2}, & 4 < x \leq 6 \end{cases}$$

muodostaa pyörähtäessään x-akselin ympäri (luvut senttimetrejä).
a) Pakkausteknisistä syistä on tärkeää tietää koristeen tilavuus. Mikä se on?

b) Koriste maalataan punaiseksi siltä osalta, jossa $0 \leq x \leq 4$ (cm). Paljonko maalita tarvitaan yhteen koristeeseen, kun maalinkulutuksen tiedetään olevan $2dl/m^2$?