

## Analyysi 2

### 10. harjoitus 16.-20.11.2009

1. Laske polun  $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t) \text{ kaikilla } t \in [0, 2\pi],$$

pituus.

2. Olkoot  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . Laske polun  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,

$$\alpha(t) = (1-t)x + ty \text{ kaikilla } t \in [0, 1],$$

pituus.

3. Laske funktion  $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x, y, z) = \frac{z^2}{x^2 + y^2} \text{ kun } x \neq 0 \text{ tai } y \neq 0,$$

integraali pitkin tehtävän 1 polkua.

4. Laske kuvauksen  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x, y) = |x| + |y| \text{ kaikilla } (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

integraali pitkin polkua  $\alpha : [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,

$$\alpha(t) = (\cos t, \sin t) \text{ kaikilla } t \in [0, \pi/2].$$

5. Olkoon  $n \in \mathbb{N}$ . Laske funktion  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f(x, y, z) = (y, 3y^3 - x, z) \text{ kaikilla } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

integraali pitkin polkua  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$\alpha(t) = (t, 0, t^n) \text{ kaikilla } t \in [0, 1].$$

6. Sinisorsa ui pisteestä  $P_1 = (0, 0)$  pisteeseen  $P_2 = (1, 1)$  polkua  $\alpha_1(t) = (t^2, t)$  pitkin ja silkkiuikku polkua  $\alpha_2(t) = (t, t)$  pitkin. Oletetaan, että virtaa kuvaa funktio  $f(x, y) = (-\alpha x, 0)$ , missä  $\alpha > 0$ . Kumpi uimari tekee suuremman työn? (Vihje: työ =  $-\int_{\alpha} f \cdot d\alpha$ )

Tehtävissä 7-8 käytetään seuraavaa määritelmää: polun  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  vastakkainen polku  $\overleftarrow{\alpha} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  määritellään asettamalla

$$\overleftarrow{\alpha}(t) = \alpha(b - (t - a)) \text{ kaikilla } t \in [a, b].$$

7. Oletetaan, että  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  on  $\mathcal{C}^1$ -polku. Osoita, että  $l(\alpha) = l(\overleftarrow{\alpha})$ .

8. Oletetaan, että integraali  $\int_{\alpha} f \cdot d\alpha$  on olemassa. Osoita, että

$$\int_{\overleftarrow{\alpha}} f \cdot d\overleftarrow{\alpha} = - \int_{\alpha} f \cdot d\alpha.$$

### Lisätehtävä

1. Onko kuvauksella  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x, y) = x + x^2 + y^2 \text{ kaikilla } (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

globaalia maksimia? Esimerkissä 3.2.1 todettiin, että funktion  $f$  minimi joukossa  $\overline{B}(0, 1)$  on  $-\frac{1}{4}$ . Onko  $-\frac{1}{4}$  kuvauksen  $f$  globaali minimi?