

## Analyysi 2

### 11. harjoitus 23.-27.11.2009

1. Osoita määritelmää käyttäen, että kuvaus  $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x = y, \\ 1, & \text{muulloin,} \end{cases}$$

on Riemann-integroituva yli suorakulmion  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

2. Olkoon  $R \subset \mathbb{R}^n$  suorakulmio. Oletetaan, että  $f : R \rightarrow \mathbb{R}^2$  on Riemann-integroituva ja että  $f \geq 0$ . Osoita, että

$$\iint_R f(x, y) \, dx \, dy \geq 0.$$

Tehtävissä 3-7 laske

$$\iint_R f(x, y) \, dx \, dy$$

kun

3.  $R = [0, 1] \times [0, 2]$  ja  $f(x, y) = e^{2x}$ .

4.  $R = [0, 1] \times [1, 3]$  ja  $f(x, y) = x^2 + y$ .

5.  $R = [0, t] \times [1, t]$ , missä  $t > 1$ , ja  $f(x, y) = y^{-3}e^{tx/y}$ .

6.  $R = [0, 1] \times [-\pi, \pi]$  ja  $f(x, y) = e^{-x^2} \sin(xy)$ .

7.  $R = [0, 180] \times [1, 180]$  ja  $f(x, y) = \max\{x + y, 180\}$ .

### Lisätehtävä

1. Oletetaan, että  $A \subset \mathbb{R}^n$  on suljettu ja rajoitettu ja että kuvaus  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  on jatkuva. Osoita, että  $f$  on tasaisesti jatkuva, ts. jokaiselle  $\varepsilon > 0$  löydetään sellainen  $\delta > 0$ , että

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

aina kun  $x, y \in A$  ja  $|x - y| < \delta$ .