

Analyysi 2

2. harjoitus 21.-25.9.2009

1. Tarkastellaan kuvausta $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}.$$

Määritä f :n tasa-arvojoukot f_c , kun $c \in \mathbb{R}$. Hahmottele niiden kuvat.

2. Mitkä tason osajoukoista $]0, 1[\times]0, 1[$, $]0, 1[\times [0, 1]$ ja $[0, 1] \times [0, 1]$ ovat suljettuja ja mitkä avoimia?

3. Osoita, että suljettu pallo $\overline{B}(a, R) \subset \mathbb{R}^n$ on suljettu joukko.

4. Määritä joukon $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ reuna ∂A .

5. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$. Osoita, että $\partial(A^c) = \partial A$.

6. Määritä rationaalilukujoukon $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ kasautumis- ja reunapisteet.

7. Määritä joukon $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ kasautumis- ja reunapisteet.

8. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$. Osoita, että $\text{int}A = A \setminus \partial A$.

Lisätehtäviä

1. Tarkastellaan kuvausta $f : X \rightarrow Y$, missä $X \subset \mathbb{R}^n$ ja $Y \subset \mathbb{R}^m$. Määritellään joukon $B \subset Y$ alkukuva kuvauksessa f asettamalla

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}.$$

Osoita, että f on injektio, jos ja vain jos $f^{-1}(f(A)) = A$ jokaiselle $A \subset X$.

2. Osoita, että joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on suljettu, jos ja vain jos $\partial A \subset A$.

3. Määritä kuvauksen $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sin \frac{1}{x} \text{ kaikilla } 0 < x < 1,$$

graafin kasautumispisteet.