Analyysi 2
3. harjoitus 28.-2.10.2009

1. Osoita määritelmää käyttäen, että $\mathbb{R}^3$:n lukujono $(\frac{1}{k^2}, 0, \frac{1}{k})$ suppenee, kun $k \to \infty$.

2. Osoita, että jono (a_k) on Cauchy-jono $\mathbb{R}^n$:ssä täsmälleen silloin, kun sen jokainen koordinaattijono (a_k^j), missä $j = 1, \ldots, n$, on Cauchy-jono $\mathbb{R}$:ssä.

3. Oletetaan, että kuvauksilla $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ja $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ on raja-arvot pisteessä $a \in \mathbb{R}^n$. Osoita, että

$$\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x).$$

4. Tarkastellaan kuvausta $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$f(x, y) = (x, y, x + y) \text{ kaikilla } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Osoita määritelmää käyttäen, että f on jatkuva.

5. Onko kuvauksella $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \text{ kaikilla } (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

raja-arvo pisteessä $(0, 0)$? Vihje: käytä lausetta 1.4.5 (a).

6. Oletetaan, että kuvaukset $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ja $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ovat jatkuvia pisteessä $a \in \mathbb{R}^n$. Osoita, että kuvaus $f + g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ on jatkuva pisteessä $a \in \mathbb{R}^n$.

Lisätehtäviä

1. Osoita, että lukujonon $(a_k) \subset \mathbb{R}^n$ raja-arvo on yksikäsitteinen.

2. Osoita, että kuvaus $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ on jatkuva täsmälleen silloin, kun sen jokainen koordinaattifunktio $f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, missä $j = 1, \ldots, n$, on jatkuva.

3. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$. Osoita, että kuvaus $f : A \to \mathbb{R}^m$ on jatkuva joukon A kasautumispisteessä a täsmälleen silloin, kun $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.