

## Analyysi 2

### 5. harjoitus 12.-16.10.2009

1. Osoita määritelmää 2.1.5 käyttäen, että kuvaus  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x, y) = x + y^2 \text{ kaikilla } (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

on differentioituva.

2. Määritä tehtävän 1 kuvauksen  $f$  tangenttitaso pisteessä  $(1, 0, 1)$ .

3. Määritä kuvauksen  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x, y, z) = x + y + z \text{ kaikilla } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

gradientti. Olkoon  $e = (e_1, e_2, e_3) \in \mathbb{R}^3$  sellainen, että  $f(e) = 0$ . Osoita, että  $\text{grad } f(x, y, z) \cdot e = 0$ .

4. Laske funktion  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x, y, z) = xy \sin z \text{ kaikilla } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

suunnattu derivaatta suuntaan  $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$  pisteessä  $(1, 1, 1)$ .

5. Määritä määritelmää 2.2.1 käyttäen kuvauksen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f(x) = (x, 2x, 0) \text{ kaikilla } x \in \mathbb{R},$$

derivaatat pisteissä 0 ja 1.

6. Onko kuvaus  $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,

$$A(x, y) = (x + y, x + 1) \text{ kaikilla } (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

jonkin funktion derivaatta?

7. Onko kuvaus  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,

$$g(x, y) = (x \sin x, y \sin x) \text{ kaikilla } (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

differentioituva? Jos on, laske sen derivaatta pisteessä  $(0, 1)$ .

### Lisätehtäviä

1. Olkoon  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  differentioituva funktio, jonka derivaatta on jatkuva. Merkitään kaikilla  $c \in \mathbb{R}$

$$f_c = \{x \in A \mid f(x) = c\}.$$

Joukkoa  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{grad } f(a) \cdot (x - a)\}$  kutsutaan  $f_c$ :n *tangenttitasoksi* pisteessä  $a$ . Määritä joukon  $f_1$  tangenttitaso pisteessä  $(1, 1, 1)$ , kun  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ .

**2.** Keksi kaksi eri kuvausta  $f_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ja  $f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , joiden derivaatta pisteessä  $(0, 0)$  on kuvaus  $A(x, y) = (x, 2y)$ .