

Analyysi 2

6. harjoitus 19.-23.10.2009

1. Olkoon A $m \times n$ -matriisi. Määritellään lineaarikuvaus $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ asettamalla $f(x) = Ax$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$. Osoita, että f on differentioituva ja $J_{f,x} = A$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$.
2. Oletetaan, että $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ on differentioituva ja että $f'(x) = A$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$, missä A on kiinteä $m \times n$ -matriisi. Osoita, että on olemassa sellainen $c \in \mathbb{R}^m$, että $f(x) = Ax + c$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$.
3. Olkoon $a \in \mathbb{R}^m$. Oletetaan, että $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ on sellainen kuvaus, että $|f(x) - f(a)| \leq 3|x - a|^4$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$. Osoita, että $f'(a) = 0$.
4. Laske kuvauksen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = g(x, y) \cdot h(x, y)$ derivaatta pisteessä $(0, \pi/2)$, kun $g(x, y) = (x, x)$ ja $h(x, y) = (2x, \sin y)$.
5. Onko joukko $E =]0, 1[\cup]1, 2[\subset \mathbb{R}$ käyräyhtenäinen?
6. Keksi esimerkki sellaisesta reaaliarvoisesta kuvauksesta f , joka ei ole vakiokuvaus ja jonka derivaatta on nolla.

Lisätehtävä

1. Oletetaan, että kuvaus $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ on differentioituva pisteessä $t \in \mathbb{R}$ ja että kuvaus $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ on differentioituva pisteessä $g(t)$. Osoita, että kuvaus $f \circ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on differentioituva pisteessä t ja

$$(f \circ g)'(t) = \text{grad } f(g(t)) \cdot g'(t).$$