Analyysi 2
7. harjoitus 26.-30.10.2009

1. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ derivoituva. Oletetaan, että on olemassa sellainen $c \in \mathbb{R}$, että $|f(x)| = c$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Osoita, että $f(x) \cdot f'(x)h = 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja $x \in \mathbb{R}$.

2. Oletetaan, että kuvaus $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on derivoituva pisteessä $a \in \mathbb{R}^n$ ja että $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on $\mathcal{C}^1$-funktio. Osoita, että

$$\partial_i(f \circ g)(a) = \sum_{j=1}^{n} \partial_j f(g(a)) \partial_i g_j(a)$$

kaikilla $i = 1, \ldots, n$. (Vihje: käytä ketjusääntöä.)

3. Laske tehtävää 2 käyttäen $\partial_2(f \circ g)(x_1, x_2)$, kun $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ on sellainen $\mathcal{C}^1$-kuvaus, että $\partial_1 f(x) = \partial_2 f(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^2$ ja $g(x_1, x_2) = (12(x_1 - x_2), 12(x_1 + x_2))$.

4. Osoita, että kuvaus $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$g(x_1, x_2) = (e^{x_1} \cos x_2, e^{x_1} \sin x_2) \text{ kaikilla } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

on lokaalisti injektio jokaisessa pisteessä $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

5. Onko tehtävän 4 kuvaus g injektio?

6. Tarkastellaan kuvausta $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(x_1, x_2) = (e^{x_1} \cos x_2, x_2 e^{x_2}) \text{ kaikilla } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Osoita, että f on lokaalisti kääntyvä pisteessä 0. Laske $J_{f^{-1},(1,0)}$.

7. Oletetaan, että kuvaukset $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ja $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ovat injektioita. Onko kuvaus $f + g$ injektio?

Lisätehtäviä

1. Oletetaan, että kuvaukset $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ja $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ovat derivoituvia pisteessä $a \in \mathbb{R}^n$. Osoita, että kuvaus $gf : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ on derivoituva pisteessä a ja

$$(gf)'(a)(x) = (g'(a)x)f(a) + (f'(a)x)g(a).$$

2. Oletetaan, että kuvaukset $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ja $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ovat derivoituvia pisteessä $a \in \mathbb{R}^n$. Osoita, että kuvaus $f \cdot g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ on derivoituva pisteessä a ja

$$(f \cdot g)'(a)(x) = f'(a)x \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)x.$$