Analyysi 2
8. harjoitus 2.-6.11.2009

1. Kuvaus $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ on *bi-Lipschitz-kuvaus*, jos on olemassa sellainen $L > 0$, että

$$\tfrac{1}{L}|x-y| \leq |f(x)-f(y)| \leq L|x-y|$$

kaikilla $x, y \in \mathbb{R}^n$. Osoita, että bi-Lipschitz-kuvaus on injektio.

2. Osoita, että yhtälö $x_1^4 + x_2^4 - 2x_1x_2 = 0$ määrittelee sellaisen $\mathcal{C}^1$-funktion $g : \Delta \to \mathbb{R}$, että $g(1) = 1$. Tässä $\Delta \subset \mathbb{R}$ on avoin joukko ja $1 \in \Delta$.

3. Laske kuvauksen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3 \text{ kaikilla } (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,$$

3. kertaluvun osittaisderivaatat.

4. Tarkastellaan kuvausta $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2) = \int_0^{x_1} (x_2 \sin t + \cos(x_2 t))\, dt \text{ kaikilla } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Laske $\partial_1\partial_2\partial_2 f(x_1, x_2)$.

5. Määritä kuvauksen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2) = e^{x_1x_2^2} \text{ kaikilla } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

2. asteen Taylorin polynomi origossa.

6. Määritä kuvauksen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2) = e^{x_1}x_2 + x_3 \text{ kaikilla } (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,$$

2. asteen Taylorin polynomi T_0^2 origossa.

7. Tarkastellaan tehtävän 6 kuvausta f. Arvioi erotusta $|f(x) - T_0^2(x)|$, kun $|x| \leq 1$.

Lisätehtävä

1. Oletetaan, että $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ on $\mathcal{C}^2$-funktio. Osoita, että kaikilla $a, h \in \mathbb{R}^n$

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{j=1}^n \partial_j f(a)h_j + \tfrac{1}{2}\sum_{j,k=1}^n \partial_k\partial_j f(a)h_kh_j + |h|^2\eta(h),$$

missä $\eta(h) \to 0$ kun $h \to 0$.