

Matematiikan perusteet taloustieteilijöille I

Harjoitukset syksy 2009

1. Laskeskele ja sieventele

a) $\sqrt[3]{27}$

b) $27^{\frac{2}{3}}$

c) $27^{-\frac{1}{3}}$

d) $x^2 \cdot \sqrt[4]{(x^{-\frac{8}{3}})^3 y^8}$

e) $(x - 3)^2$

f) $(x - 3)(x + 3)$

g) $3 \sum_{i=1}^3 (2x_i + 1)$ kun, $x_i = 2i$ kaikilla $i \in \mathbb{N}_+$.

2. Osoita induktiolla, että

a) $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n + n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}_+$

b) $2 + 4 + 8 + 16 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}_+$

3. Ratkaise yhtälöt

vast:

a) $2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 = 0$

a) $x = -1 \vee x = 3 \vee x = 1/2$

b) $2x^2 - 4x + 2 = 0$

b) $x=1$

c) $-4x^3 + 5x^2 - 2x = -x^4$

c) $x = 0 \vee x = 1 \vee x = 2$

d) $x^2 - x + 2 = 0$

d) ei ratk.

4. Jaa seuraavat lausekkeet tekijöihin

a) $2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$

b) $2x^2 - 4x + 2$

c) $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x$

d) $x^2 - x + 2$.

5. Ratkaise yhtälöt

- a) $|x| + |3x - 1| = 4$
- b) $|x - 6| = 3 - 2x$
- c) $\sqrt{x} = 2 - x$
- d) $\sqrt{x} + \sqrt{x - 4} = 2$
- e) $|x - 6| = |3 - 2x|$

vast:

- a) $x = -3/4 \vee x = 5/4$
- b) $x = -3$
- c) $x = 1$
- d) $x = 4$
- e)

6. Ratkaise seuraavat epäyhtälöt

- a) $2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 \leq 0$
- b) $2x^2 - 4x + 2 \leq 0$
- c) $|x| + |3x - 1| \leq 4$
- d) $|x - 6| \leq 3 - 2x$
- e) $-4x^3 + 5x^2 - 2x \leq -x^4$
- f) $x^2 - x + 2 \leq 0$
- g) $|x - 3| + |x^2 - 3x + 2| < 2$
- h) $\frac{1}{x} < \frac{3x - 1}{x} \leq 2$
- i) $|x - 6| \leq |3 - 2x|$

vast:

- a) $x \leq -1 \vee 1/2 \leq x \leq 3$
- b) $x = 1$
- c) $-3/4 \leq x \leq 5/4$
- d) $x \leq -3$
- e) $0 \leq x \leq 2$
- f) ei ratk.
- g) $1 < x < 3$
- h) $\frac{2}{3} < x \leq 1$
- i)

7. Ratkaise seuraavat epäyhtälöt

- a) $\sqrt{x} < 2 - x$
- b) $\sqrt{x} \geq 2 - x$
- c) $\sqrt{x} + \sqrt{x - 4} < 2$

vast:

- a) $0 \leq x < 1$
- b) $x \geq 1$
- c) ei ratk.

8. Ratkaise seuraava epäyhtälö käyttäen sekä 1^o ja 3^o tapaa.

$$\sqrt{x + 1} < \sqrt{x + 2} - 3.$$

9. Etsi seuraavien funktioiden määrittelyjoukot

a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4x-1}} - \sqrt{1-x^2}$ vast:
a) $M_f =]1/4, 1]$
b) $f(x) = \sqrt{\sqrt{x}-1}$ b) $M_f = [1, \infty[.$

10. Olkoon $f(x) = 2x^2 + 3$ ja $g(x) = \sqrt{x-1}$.

Määrää

a) $(f \circ g)(x)$ ja $(f \circ g)(1)$

b) $(g \circ f)(x)$ ja $(g \circ f)(1)$

c) $M_{g \circ f}$ ja $M_{f \circ g}$

Vast: a) $(f \circ g)(x) = 2x + 1$, b) $(g \circ f)(x) = \sqrt{2x^2 + 2}$,
c) $M_{g \circ f} = \mathbb{R}$ ja $M_{f \circ g} = [1, \infty[.$

11. Etsi suora, joka sisältää suorien $3x - 4y + 7 = 0$ ja $6x - 2y - 3 = 0$ leikkauspisteen ja täyttää seuraavat ehdot

a) kulkee origon kautta

b) on yhdensuuntainen suoran $3x - 2y + 7 = 0$ kanssa

c) on kohtisuorassa suoraa $3x - 2y + 7 = 0$ vastaan.

Vast: a) $y = \frac{51}{26}x$, b) $y = \frac{3}{2}x + \frac{4}{6}$ c) $y = -\frac{2}{3}x + \frac{205}{54}$.

12. Ratkaise yhtälöparit

a) $\begin{cases} -x - y + 2 = 0 \\ 2x + 2y - 4 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ 4x + 2y - 5 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 4y + 7 = 0 \\ 6x - 2y - 3 = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = \frac{x}{20} + 1 \\ x = 32 - 4y - y^2 \end{cases}$

Vast: a) $\forall x \in \mathbb{R}$, b) ei ratk.

c) $x = \frac{13}{9}, y = \frac{17}{6}$, d) (20,2) tai (-540,-26).

13. Ratkaise

a) $3^{-x^2} = (\sqrt[4]{3})^{-5x+1}$,

b) $2 \log_5(x+1) = 1$,

c) $\frac{3^{2x-3}}{\sqrt{2}} < \frac{1}{\sqrt{54}}$,

d) $2^{2x} + 1 \leq 2^{x+1}$.

Vast:

a) $x = 1$ tai $x = \frac{1}{4}$, b) $x = \sqrt{5} - 1$,

c) $x < 3/4$, d) $x = 0$.

14. Ratkaise

a) $\log_{10}(x^2 - 1) = 1 + \log_{10}(x - 1)$ b) $2^{x^2} = 3^{2x}$

c) $\log_2(2x) = \log_4(3x)$ d) $\log_{\frac{1}{2}}(2x - 1) + 2 > \log_{\frac{1}{2}}(3x - 4)$

e) $\log_{1/2} 2x < \log_2 7$ f) $2^{x^2} < 3^{2x}$ g) $\log_2 2x = \log_3 x$.

Vast:

a) $x = 9$ b) $x = 0$ tai $x = \log_2 9$ c) $x = 3/4$ d) $x > 3/2$

e) $x > 1/14$ f) $0 < x < \log_2 9$ g) $x = \sqrt[{\log_2 3 - 1}]{1/3}$.

15. Tutki seuraavien funktioiden bijektiivisyyttä ja määritä käänteisfunktio jos mahdollista

a) $f(x) = x^2 + 2x + 1$,

b) $f(x) = \sqrt{x-1}$,

c) $f(x) = 5x + 3$.

Vast: a) $f^{-1}(x) = -1 \pm \sqrt{x}$ b) $f^{-1}(x) = x^2 + 1$

c) $f^{-1}(x) = \frac{1}{5}x - \frac{3}{5}$.

16. Määritä

- a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x + 5}{x^3 + 6x^2 + 7}$
- b) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, kun $f(x) = \begin{cases} -x + 1, & x \geq 0 \\ 3x, & x < 0 \end{cases}$
- c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{3x^2}$
- d) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3}{x - 3}$
- e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3}$
- f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3}$
- g) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^3}\right)^2$

Vast: a) $\frac{1}{2}$ b) \nexists c) 0 d) \nexists e) 0 f) \nexists g) ∞ .

17. Määritä

- a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2}{2x^3 + 1}$
- b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + x + 1}{2x^2 + 5x + 2}$
- c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 1}{x^2 + 4x}$
- d) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 9}$
- e) $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{1}{x + 2} + \frac{4}{x^2 - 4}\right)$
- f) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^3 - 4x^2 - 5x + 3}{2x^2 + 3x - 2}$
- g) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + x^3 + x^4 - 4}{x - 1}$.

Vast: a) 0 b) $\frac{3}{2}$ c) ∞ d) $9/2$ e) $-1/4$ f) $-6/5$ g) 10.

18. Määritä

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}\right)$
- b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 - x + 1})$
- c) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x + \sqrt{x^2 - x + 1})$
- d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$
- e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}$
- f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} + 1}{x}$

$$\text{g) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^2 - 1}}{2x} \qquad \text{h) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$$

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow \infty} (x^4 + 2x^2 + 1).$$

Vast: a) ∞ b) $1/2$ c) ∞ d) -1 e) 2 f) $\cancel{\neq}$ g) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ h) $1/2$ i) ∞ .

19. Onko funktio $f(x)$ jatkuva, kun

$$f(x) = \begin{cases} 5x - 2, & x \leq 1 \\ 3x, & 1 < x < 2 \\ 2x^2 - 5, & x \geq 2 \end{cases}$$

Vast: ei jatkuva kohdassa $x = 2$.

20. Voidaanko funktio $f(x) = \frac{x-1}{|x-1|}$ määritellä kohdassa $x = 1$ niin, että se olisi jatkuva tuossa kohdassa?

21. Derivoi seuraavat funktiot

$$\text{a) } x + 2\sqrt{x} \qquad \text{b) } \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \qquad \text{c) } x(2x-3)(5x-4)^3$$

$$\text{d) } \sqrt{\frac{x-2}{x+3}} \qquad \text{e) } (2-3x^2)^3 \qquad \text{f) } \sqrt[3]{x^2 \sqrt[3]{x^2}}$$

$$\text{g) } e^{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{h) } \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^2 \qquad \text{i) } 2^x x^2 \qquad \text{j) } x^{\frac{1}{x}}.$$

22. a) Laske $(f^{-1})'(2)$, kun $f(x) = \sqrt{x-1}$.

b) Määrää funktiolle $f(x) = \ln x$ kohtaan $x = e$ piirretyn tangentin yhtälö.

Vast: a) 4.

23. Tutki seuraavan funktion jatkuvuutta ja derivoituvuutta

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & , x \leq -1 \\ x + 1 & , -1 < x < 1 \\ x^2 + 1 & , 1 \leq x \leq 3 \\ 6x - 8 & , x > 3 \end{cases}$$

24. Määritä kolme ensimmäistä derivaattaa kohdassa $x = 0$,

kun $f(x) = \sqrt{x} + e^{x^2+1}$.

Vast: \bar{A} .

25. Määritä $f'(x_0)$, jos $y = f(x)$ on derivoituva funktio, joka on määritelty implisiittisesti seuraavilla yhtälöillä.

a) $x^2 + 3xy + 2y^2 - 3 = 0$, $x_0 = -1$

b) $\frac{x+y}{xy} + \frac{3}{4} = 0$, $x_0 = -1$.

Vast: a) $-\frac{4}{5}$ b) -16.

26. Laske raja-arvot (L'hospital)

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{x^2 - 2x + 1}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x}$ c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^{3x} - 5x)}{x}$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(e^{3x} - 5x)}{x}$ e) $\lim_{x \rightarrow 0} x^x$.

Vast: a) -1 (Huom. $2 \times L'H$) b) 1 c) -2 d) 3 e) \bar{A} , $\lim_{x \rightarrow 0^+} = 1$.

27. Olkoon $f(x) = \ln x$, alkutilanne $x_0 = e$ ja muuttujan x muutos $\Delta x = 10$. Mitä on tällöin funktion todellinen muutos Δf ja differentiaali df .

Vast: $\Delta f = 1,5430$ $df = 3,6787$

28. Onko funktio

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y, & x < 1 \\ 2x + 2y, & x \geq 1 \end{cases}$$

jatkuva ja derivoituva.

Vast: On muualla paitsi kohdassa $x = 1$.

29. Määritä f_x ja f_y ja mahdollisesti f_z , kun

a) $f(x, y) = 2x^5y - xy^3$

b) $f(x, y) = x^y + y^x$

c) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)^2$

d) $f(x, y, z) = 2xy^2(y^3x + e^{2z})^2$.

30. Määritä funktion $f(x, y) = x^2y^5$ muuttujan x muutosta 0.5 ja muuttujan y muutosta -0.2 vastaava kokonaisdifferentiaali df pisteessä (1,2). Laske myös funktion arvon todellinen muutos Δf .

Vast: $df = 16$ $\Delta f = 10.5$

31. a) Olkoon $f(x, y) = x^2 - 3xy^2$, missä $x = uv$ ja $y = u^2 + v^2$.

Määritä $\frac{\partial f}{\partial v}$.

- b) Määritä $\frac{\partial z}{\partial x}$ ja $\frac{\partial z}{\partial y}$ ja niiden arvo pisteessä (0,0), kun $z = f(x, y)$

toteuttaa yhtälön $x^2z + y^2z + z^2 = 1$.

Huom: Implisiittinen derivointi.

- c) Laske funktion $f(x, y, z) = x^3e^{3y^2} + z^2$ toisen kertaluvun osittaisderivaatat.

Vast: b) 0

32. Tutki funktion $f(x) = 2x^3 - 15x^2 - 84x + 11$ monotonisuutta.

33. Määrää seuraavien funktioiden suurin ja pienin arvo annetulla välillä

a) $f(x) = x^2 e^{-x}$, $[-3, 3]$.

b) $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2, & x < 0 \\ |-x + 2|, & x \geq 0 \end{cases}$, $[-1, 3]$.

Huom. käytä ääriarvon laatutarkasteluun derivaatan merkkikaaviota.

34. Määrää seuraavien funktioiden suurin ja pienin arvo annetulla välillä

a) $f(x) = x^3 - 3x^2$, $x \geq -1$.

b) $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}, & x \leq -1, \\ x + 1, & -1 < x < 2, \\ -\frac{1}{4}x^2 + x, & x \geq 2 \end{cases}$, $[-4, 4]$.

Vast:

a) $\text{Min } f(-1) = f(2) = -4$

b) $\text{Min } f(-4) = 7\frac{1}{2}$.

Huom. käytä ääriarvon laatutarkasteluun derivaatan merkkikaaviota.

35. Määrää seuraavien funktioiden suurin ja pienin arvo annetulla välillä

a) $f(x) = x^3 - 3x^2$, $x \geq -1$.

b) $f(x) = x^2 e^{-x}$, $[-3, 3]$.

Huom. käytä ääriarvon laatutarkasteluun toista derivaattaa.

36. Määritä funktion $f(x, y) = 10xy - 5x^2 - 7y^2 + 40x$ ääriarvot.

Vast: $\max f(14, 10) = 280$.

37. Määritä funktion $f(x, y) = x^2 - y^2$ ääriarvot.

38. Määritä funktion $f(x, y) = x^2 - 4x + 6y^2 + 1$ suurin ja pienin arvo joukossa $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 3 \text{ ja } |y| \leq 1\}$.

Vast: $\text{Max } f(0, -1) = f(0, 1) = 7$ $\text{Min } f(2, 0) = -3$.

39. Määritä funktion $f(x, y) = 10xy - 5x^2 - 7y^2 + 40x$ ääriarvot ehdolla $x + y = 13$.

Vast: $\max f(8, 5) = 225$.

Ohje: käytä Lagrangea.

40. Määritä funktion $f(x, y) = 10xy - 5x^2 - 7y^2 + 40x$ ääriarvot joukossa

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0 \text{ ja } x + y \leq 13\}.$$

Vast: $\min f(0, 13) = -1183$, $\max f(8, 5) = 225$.

41. Määritä funktion $f(x, y) = 10xy - 5x^2 - 7y^2 + 40x$ maksimiarvo ehdolla $x + y \leq 13$.

Vast: $f(8, 5) = 225$.

Ohje: käytä Kuhn-Tuckeria.