

Matematiikan perusmenetit/mat.

Harjoitus 11 syksy 2009

A osa:

1. Onko $f'(1)$ olemassa, kun

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x, & \text{kun } x \leq 1 \\ 2x - 1, & \text{kun } x > 1 \end{cases}, \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1, & \text{kun } x \geq 1 \\ 4x - 3, & \text{kun } x < 1 \end{cases}.$$

2. Olkoon

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{kun } x \geq 1 \\ \frac{2x^3}{3}, & \text{kun } x < 1 \end{cases}.$$

Määrää $f'(x)$, kun $x \neq 1$ ja $\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x)$ sekä $\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x)$. Tutki, onko f jatkuva pisteessä $x = 1$ ja onko $f'(1)$ olemassa?

3. Olkoot funktiot $f(x)$ ja $g(x)$ derivoituvia pisteessä x_0 . Olkoon $c \in \mathbb{R}$. Osoita, että

a) funktio $(f + g)(x)$ on derivoituva pisteessä x_0 ja $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

b) funktio $(cf)(x)$ on derivoituva pisteessä x_0 ja $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$.

4. Määrää käyrän $y = x^2$ ne tangentit, jotka kulkevat pisteen $(1, 0)$ kautta.

5. Derivoi $f(x)$, kun $f(x)$ on

$$\text{a) } (x - 1)(x + x^3), \quad \text{b) } \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}, \quad \text{c) } x^3 \sin x \cos x, \quad \text{d) } \frac{\sin x}{1 + \cos x}, \quad \text{e) } \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^4.$$

6. Mikä on funktion $f(x) = x^2$ muuttujan lisäystä $\Delta x = \frac{1}{10}$ vastaava differentiaali $df(x)$ kohdassa $x = 2$? Mikä on tällöin Δf ?

7. Osoita, että yhtälöllä $10x^4 - 6x + 1 = 0$ on juuri välillä $[0, 1]$. (Opastus: tarkastele funktiota $f(x) = 2x^5 - 3x^2 + x$ ja sovela Rollen lausetta.)

8. Osoita Lagrangen väliarvolauseen avulla, että

$$\frac{\pi}{60} < \cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{5} < \frac{\sqrt{2}\pi}{60}.$$

Matematiikan perusmetodit/mat.

Harjoitus 11 syksy 2009

B osa:

1. Olkoon $f(x) = \frac{\sin|x|}{2+\cos x}$. Tutki, onko $f'(0)$ olemassa.
2. Määräät sellaiset vakiot a ja b , että funktio

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & \text{kun } x > 1 \\ 3x^2 + 4, & \text{kun } x \leq 1 \end{cases}$$

on derivoituva pisteessä $x = 1$.

3. Osoita derivaatan määritelmään nojaten, että $D(x^3 + 2x - 3) = 3x^2 + 2$.
4. Olkoot funktiot $f(x)$ ja $g(x)$ derivoituvia pisteessä x_0 sekä $g(x_0) \neq 0$. Osoita, että

- a) funktio $(\frac{1}{g})(x)$ on derivoituva pisteessä x_0 ja

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

- b) funktio $(\frac{f}{g})(x)$ on derivoituva pisteessä x_0 ja

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

(Vihje: käytä edellistä kohtaa ja tulon derivoimisääntöä hyväksi.)

5. Olkoon f derivoituva funktio, jolla $0 \leq f'(x) \leq 2$ aina, kun $x \in [0, 2]$.
Olkoon lisäksi $f(0) = 1$ ja $f(2) = 4$. Osoita, että $2 \leq f(1) \leq 3$.
6. Osoita Lagrangen väliarvolauseen avulla, että
 - a) $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2} \quad \forall x > 0$.
 - b) $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.