

Matematiikan perusmetodit/mat.

Harjoitus 12 syksy 2009

A osa:

1. Määrää raja-arvo (mikäli raja-arvo on olemassa)

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$, b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2}$, c) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\sin x}{x^3} \right)$, d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos \pi x}{x^2 - 2x + 1}$,

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{1 - \cos bx}$ ($a, b \neq 0$).

2. Osoita, että yhtälöllä $10x^3 + 4x^2 - 7 = 0$ on tarkalleen yksi positiivinen juuri.

3. Olkoon $f(x) = x^7 + 2x^5 - 3$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Osoita, että $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on olemassa.

b) Laske $(f^{-1})'(0)$.

4. Olkoon $f(x) = 2x + \sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Osoita, että $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on olemassa.

b) Laske $(f^{-1})'(2\pi)$.

5. Olkoon

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x < 0 \\ -\frac{x}{2}, & 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 4x + 2, & 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

Etsi funktion f paikalliset ja absoluuttiset ääriarvot.

6. Käytettävissä on 100 metriä aitaa sekä pitkä suora muuri, jota voidaan käyttää osana aitausta. Rakenna mahdollisimman suuri aitaus, kun muuri ja aita muodostavat yhdessä suorakulmion.

7. Valmistetaan tasapaksusta aineesta astia, jonka pohja on neliö ja tilavuus 1. Astiaan tehdään kansi kalliimasta materiaalista, jonka hinta on 15-kertainen pinta-alayksikköä kohden verrattuna muuhun osaan. Määrää astian mitat, kun materiaalikulut on saatava mahdollisimman pieniksi.

Matematiikan perusmetodit/mat.

Harjoitus 12 syksy 2009

B osa:

1. Määrää raja-arvo (mikäli raja-arvo on olemassa)

a) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2x - \pi}{\cos^2 x}$, b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\cos 7x - 1)}{x^2}$.

2. Määrää ne positiiviset reaaliluvut a , joilla yhtälöllä $x + a \sin x - 2 = 0$ on ratkaisu välillä $[0, \frac{\pi}{2}]$.
3. Tutki, miten yhtälön $x^3 - 3ax^2 + 2 = 0$ reaalisten ratkaisujen lukumäärä riippuu vakiosta $a \geq 0$.
4. Käytettävissä on 100 metriä aitaa sekä pitkä suora muuri, jota voidaan käyttää osana aitausta. Rakenna mahdollisimman suuri aitaus, kun aita on osa jonkin ympyrän kehää.
5. Osoita, että funktio $f(x) = x^2$ on alaspäin kupera suoraan määritelmään perustuen.
6. Funktio $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ toteuttaa ehdot: $f(1) = 1$ ja

$$|xf(x) - yf(y)| \leq |x - y|^2 \quad \forall x > 0, y > 0.$$

Määrää funktio f .