

# Matematiikan perusmetodit/mat.

## Harjoitus 13 syksy 2009

### A osa:

1. Ratkaise yhtälö

a)  $e^{-2x+1} = 2$ , b)  $\log_2(\log_2 x) = -1$ , c)  $\log_{10}(x^2 - 1) = 1 + \log_{10}(x - 1)$ ,  
d)  $\ln \sqrt{x-1} + \ln \sqrt{2x-1} = \ln \sqrt{3}$ , e)  $2^{x^2} = 3^{2x}$ , f)  $\log_2 2x = \log_4 3x$ .

2. Ratkaise epäyhtälö

a)  $2 \cdot 4^x - 2^x > 1$ , b)  $\log_{\frac{1}{2}}(2x - 1) + 2 > \log_{\frac{1}{2}}(3x - 4)$ ,  
c)  $\log_{\frac{1}{2}} 2x < \log_2 7$ , d)  $2^{x^2} < 3^{2x}$ .

3. Olkoon  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln(\sqrt{1+x^2} - x)$ . Osoita, että  $f$  on pariton funktio.

4. Määrä raja-arvot

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x}$ , b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$ , c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$ , d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x}\right)^x$ ,  
e)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{2x}$ , f)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}$ , g)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$ ,  
h)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x[\ln x - \ln(x+1)]$ .

5. Derivoi  $f(x)$ , kun  $f(x)$  on

a)  $x \ln x - x$ , b)  $x^5 \ln x$ , c)  $\sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x}}}$ , d)  $e^{e^x}$ , e)  $2^{x^2-1}$ , f)  $(\ln x)^{\ln x}$ ,  
g)  $x^{\sin x}$ , h)  $(\arcsin x)^2$ , i)  $\arcsin \frac{1}{x}$ , j)  $\arctan \sqrt{x}$ , k)  $\arctan \sqrt{e^x - 1}$ ,  
l)  $\arctan(\ln x)$

6. Määrä raja-arvot

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{e^{3x}-1}$ , b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$ , c)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\cot^2 x}$

7. Olkoon  $f(x) = x^3 + 5x + 8$ . Merkitään  $h(y) = e^{f^{-1}(y)}$ . Laske  $h'(2)$ .

# Matematiikan perusmetodit/mat.

## Harjoitus 13 syksy 2009

### B osa:

- Funktio  $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$  ja funktio  $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ .
  - Osoita, että  $D \sinh x = \cosh x$  kaikilla  $x \in \mathbb{R}$ .
  - Osoita, että funktiolla  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sinh x$ , on käänteisfunktio  $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f^{-1}(x) = \operatorname{arcsinh} x$ .
  - Määrä funktion  $f^{-1}(x) = \operatorname{arcsinh} x$  derivaatta.
- Olkoon  $f(x) = \arcsin(\sin x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Laske  $f'(x)$  ja piirrä funktion  $f(x)$  kuvaaja.
- Olkoon  $f(x) = x - \arctan(\tan x)$ ,  $\forall x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Laske  $f'(x)$  ja piirrä funktion  $f(x)$  kuvaaja.
- Derivoi
  - $f(x) = \frac{(x+1)(x+4)}{\sqrt{x(x+2)}}$ ,
  - $f(x) = \frac{(x+1)^2 \sqrt{x-1}}{(x+4)^3 e^x}$ .
- Integroi
  - $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ ,
  - $\int 2x(\sqrt{x} - 1) dx$ ,
  - $\int x(\sqrt{x} + 2x\sqrt[3]{x}) dx$ ,
  - $\int (1 - \frac{1}{x})^2 dx$ ,
  - $\int \frac{1}{x+3} dx$ ,
  - $\int \frac{1}{2x+3} dx$ ,
  - $\int \frac{x^2}{3+x} dx$ ,
  - $\int \frac{x}{x^2+8} dx$ ,
  - $\int x\sqrt{1-x^2} dx$ ,
  - $\int \frac{dx}{\sqrt{7x+5}}$ ,
  - $\int \frac{1}{\tan x} dx$ ,
  - $\int \frac{e^x}{e^x+1} dx$ ,
  - $\int \frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} dx$ ,
  - $\int (e^{5x} - \sqrt{e^x}) dx$ ,
  - $\int \frac{x^3-x}{x^2+1} dx$ ,
  - $\int \frac{x+3}{x^2+2x+1} dx$ .
- Kahdesti derivoituva funktio  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  toteuttaa ehdon

$$f(x) - f(y) = f'\left(\frac{x+y}{2}\right)(x-y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Määrä funktio  $f$ .