Matematiikan perusmetodit/mat.

Harjoitus 2 syksy 2009

Joissakin tehtävissä tarvitaan niin sanottuja muistikaavoja: $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$, $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$, $(a-b)(a+b) = a^2-b^2$.

Jos luku m on parillinen kokonaisluku, niin $m = 2k$, missä $k \in \mathbb{Z}$. Jos luku m on pariton kokonaisluku, niin $m = 2k+1$, missä $k \in \mathbb{Z}$.

A osa:

1. Olkoon $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < \frac{x-2}{x+3} < 1\}$ ja $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5x + 4 < 0\}$. Esitä mahdollisimman yksinkertaisesti lukujoukot $A \cup B$ ja $A \cap B$ muodossa $\{x \in \mathbb{R} \mid P(x)\}$.
2. Olkoon $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n > 3\}$ ja $B = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 < 5\}$. Määrää A^C, $A \cup B$, $A \cap B$ ja $B \setminus A$.
3. Todista väite: $\frac{x}{2} + 1 \geq \sqrt{x+1}$ kaikilla $x \geq -1$.
4. Osoita, että $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$ (vihje: tutki lauseketta $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2$).
5. Olkoon $a < b$ sekä $A = \frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2)$ ja $B = \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$. Osoita, että $A < B$.
6. Tutki, onko seuraavissa päättelyissä jokin virhe ja jos on, niin missä: $x = y \Rightarrow x^2 = xy \Rightarrow x^2 - y^2 = xy - y^2 \Rightarrow (x+y)(x-y) = y(x-y) \Rightarrow x + y = y \Rightarrow 2y = y \Rightarrow 2 = 1$.
7. Osoita, että a) $A \cup A^C = E$ b) $A^{CC} = A$.
8. Oletetaan, että $A \subset B$. Osoita, että $B^C \subset A^C$.

B osa:

1. Todista De Morganin laki $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$.
2. Osoita, että $A \subset B$, jos ja vain jos $A \cup B = B$.
3. Olkoon $x \in \mathbb{R}$ irrationaaliluku. Osoita, että luku $\frac{x-1}{x+1}$ on irrationaalinen.

4. Oletetaan: $n, m \in \mathbb{Z}$ ja $m^2 + n^2$ on parillinen. Osoita, että $m + n$ on parillinen.

5. Osoita, että epäyhtälö

$$\sqrt{(x+2)^2 + |y^2 - 4| + (2x-1)^2 - 1} \geq 2$$

   on voimassa kaikilla x:n ja y:n reaaliarvoilla. Milloin yhtäsuuruus on voimassa?

6. Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$(a+b+c)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}) \geq 9.$$

7. Johda yhtälön $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ ratkaisukaava. Tarkastele ensin esimerkkinä yhtälöä $x^2 + 5x + 6 = 0$ (vihje: täydennä neliöiksi eli käytä muistikaavoja hyväksi).