Matematiikan perusmetodit/mat.

Harjoitus 3 syksy 2009

A osa:

1. Todista induktiolla

   a) $\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ kaikilla $n = 1, 2, \ldots$,

   b) $\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ kaikilla $n = 1, 2, \ldots$,

   c) $\prod_{j=2}^{n} (1 - \frac{1}{j^2}) = \frac{n+1}{2n}$ kaikilla $n = 2, 3, \ldots$.

2. Tiedetään, että $|a| \leq 2$ ja $|b| \leq 7$. Arvioi lukua $|4a + b|$ ylöspäin.

3. Osoita kolmioepäyhtälöä käyttäen, että

   a) $|x - 1| \geq 1$ aina, kun $|x| \geq 2$,

   b) $|4x + 7| + |4x - 1| \geq 8$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

4. Olkoon $a > 0$, $|x - 1| < a$ ja $|y - 1| < a$. Osoita, että $|x - y| < 2a$.

5. Määrää $\min S$, $\max S$, $\inf S$ ja $\sup S$ mikäli mahdollista, kun

   a) $S =]0, 1[\cup [2, 3]$,

   b) $S = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid$ yhtälöllä $x^2 - \lambda x + 2 = 0$ ei ole reaalista ratkaisua$\}$.

6. Olkoon E joukko, jossa on n alkiota. Joukon E osajoukkojen joukkoa sanotaan potenssijoukoksi (osajoukot ovat potenssijoukon alkioita). Merkitään joukon E potenssijoukkoa $P(E)$. Tyhjä joukko on aina osajoukkona mille tahansa joukolle ja joukko on aina itsensä osajoukko. Määrää seuraavien joukkojen potenssijoukot ja potenssijoukkojen alkioiden lukumäärät:

   a) $A = \emptyset$, b) $B = \{a\}$, c) $C = \{a, b\}$, d)$D = \{a, b, c\}$.

B osa:

1. Todista induktiolla, että

   a) joukon E, missä on n alkiota, potenssijoukossa $P(E)$ on 2^n alkiota,

   b) $\sum_{i=1}^{n} 3^{2i-1} = \frac{3(9^n - 1)}{8}$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$,

c) $|\sum_{j=1}^{n} a_j| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_j|$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$, kun $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ovat reaalilukuja.

2. Osoita, kolmioepäyhtälöä käyttäen, että

   a) $|x^2 - 4| < 5$ aina, kun $|x - 2| < 1$,

   b) $\left|\frac{2+x}{2-x}\right| < 2$ aina, kun $|x| < \frac{1}{2}$.

3. Määrää $\min S$, $\max S$, $\inf S$ ja $\sup S$ mikäli mahdollista, kun

   a) $S = \{n - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$,

   b) $S = \bigcup_{n=1}^{\infty}]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$.

4. Olkoon $\epsilon > 0$ sekä $|x - a| < \epsilon$ ja $|y - b| < \epsilon$. Osoita, että $|xy - ab| \leq (|a| + |b| + \epsilon)\epsilon$.