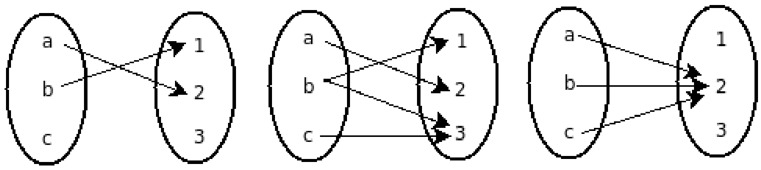
Matematiikan perusmetodit/mat.

Harjoitus 4   syksy 2009

A osa:



1. Yllä olevat kuviot esittävät relaatioita joukosta $\{a, b, c\}$ joukkoon $\{1, 2, 3\}$. Mitkä niistä ovat funktioita? Ovatko funktiot injektioita tai surjektioita? Piirrä vastaavat kuviot seuraavanlaisista funktioista: a) injektio, joka ei ole surjektio, b) surjektio, joka ei ole injektio sekä c) bijektio.

2. Ovatko seuraavat funktiot injektioita, surjektioita tai bijektioita:

   a) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = x + 2$, b) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = x + 2$,

   c) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = 2x - 1$, d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$.

3. Olkoot $S \subset \mathbb{R}$ ja $\min S$ olemassa. Osoita, että $\inf S = \min S$.

4. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$ ja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x + 1$. Määrää funktiot $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ ja $g \circ g$.

5. Olkoot f ja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funktioita. Mitä voidaan sanoa yhdistetystä funktiosta $g \circ f$, kun

   a) f ja g ovat kasvavia, b) f ja g ovatväheneviä,

   c) f on kasvava ja g on vähenevä, d) f on vähenevä ja g on kasvava.

6. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijektio ja $g(x) = 7f(x) + 8$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Osoita, että $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on bijektio.

7. Funktiolla $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^3 + x$, on käänteisfunktio. Määrää $f^{-1}(3)$.

Matematiikan perusmetodit/mat.

Harjoitus 4 syksy 2009
B osa:

1. Ovatko seuraavat funktiot injektioita, surjektioita tai bijektioita:

   a) $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $f(x) = x^2$,

   b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
   $$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{kun } x \neq 0 \\ 0, & \text{kun } x = 0 \end{cases},$$

   c) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$.

2. Olkoot $S \subset \mathbb{R}$ alhaalta rajoitettu ja $m = \inf S$. Osoita, että jokaista lukua $\epsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $x \in S$, että $x < m + \epsilon$.

3. Olkoot f ja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funktioita. Mitä voidaan sanoa yhdistetystä funktiosta $g \circ f$, kun

   a) f ja g ovat parillisia, b) f ja g ovat parittomia,

   c) f on parillinen ja g on pariton, d) f on pariton ja g on parillinen.

4. Olkoot $f(x) = \sqrt{x+1}$ ja $g(x) = x^2 - 1$. Määrää $(f \circ g)(x)$ ja $(g \circ f)(x)$ sekä määritysjoukot $D_{f\circ g}$ ja $D_{g\circ f}$. Ratkaise yhtälö $(f \circ g)(x) = g(x)$.

5. Olkoon $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ ja $f\colon B \to B$, $f(x) = \frac{2}{x+1}$. Osoita, että f vähenevä. Määrää f:n arvojoukko R_f ja määrää $f^{-1}\colon R_f \to B$.

6. Bijektio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ toteuttaa yhtälön $f(f^{-1}(x) + x) = f(2x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Määrää funktio f.

7. Olkoot $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Osoita

   a) Jos $(f \circ g)(x) = x$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, niin f on surjektio.

   b) Jos $(g \circ f)(x) = x$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, niin f on injektio.

   c) Jos edellisten kohtien molemmat ehdot ovat voimassa, niin $f^{-1} = g$.