

Matematiikan perusmetodit/mat.

Harjoitus 6 syksy 2009

A osa:

1. Laske

a) $\arcsin(\frac{1}{2})$, b) $\arcsin(-\frac{1}{2})$, c) $\arcsin(-\frac{1}{\sqrt{2}})$, d) $\arccos(\frac{1}{2})$

e) $\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2})$, f) $\arctan(-1)$, g) $\arctan(\frac{1}{\sqrt{3}})$, h) $\operatorname{arccot}(\sqrt{3})$.

2. Esitä kompleksiluvut muodossa $x + yi$

a) $(1 + 2i)(1 - 3i)$, b) $(2 - 4i)(2 - 5i)$, c) $\frac{1+i}{5+2i}$, d) $\frac{1+2i}{4-i}$,

e) $(1 + 2i)^2$, f) $(1 + 2i)^{-2}$.

3. Määää reaali- ja imaginaariosat, kun

a) $z = i(2 + 3i)(1 - 2i)$, b) $z = \frac{1-4i}{2+i}$.

4. Määää kompleksilukujen $\frac{1+i}{4+3i}$ ja $\cos \alpha + i \sin \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, itseisarvot.

5. Ratkaise kompleksiset yhtälöt

a) $z^3 + z = 0$, b) $|z + \frac{1}{z}| = 0$, c) $z + \bar{z} = 5$, d) $z + 2\bar{z} = 3 - i$.

6. Osoita, että kompleksiluvulle z pätee

a) $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, b) $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$.

7. Määää kompleksiluvun z polaariesitys, kun

a) $z = 5$, b) $z = -7i$, c) $z = -2 - 2i$, d) $z = \sqrt{3} + i$, e) $-\sqrt{3} + 3i$,

f) $z = -\sqrt{3} - i$, g) $z = 1 - i$.

8. Tutki, mitä esittää kompleksitasossa joukko ($z = x + iy$)

a) $z = \frac{2+i}{2-i}\bar{z}$, b) $|x - 2 + (y - 1)i| \leq 3$.

9. Osoita, että kompleksiluvuille z ja w pätee

a) $\overline{z\bar{w}} = \bar{z}\bar{w}$, b) $|zw| = |z||w|$.

Matematiikan perusmetodit/mat.

Harjoitus 6 syksy 2009

B osa:

1. Millä reaaliluvun x arvoilla lauseke $\frac{z^2}{z-6i}$ on reaalinen, kun $z = x + 3i$?
2. Laske
 - a) $\sin(\arccos \frac{4}{5})$, b) $\sin(\arctan 3)$.
3. Ratkaise
 - a) $z^2 - 2\bar{z} + 1 = 0$, b) $2z + |z| = i$, c) $|\bar{z} + iz| < 2$.
4. Laske
 - a) $(\sqrt{3} + i)^{30}$, b) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{321}$, c) $(-\sqrt{3} - \sqrt{3}i)^{52}$.
5. Esitä $\sin 3\alpha$ ja $\cos 3\alpha$ lausekkeiden $\sin \alpha$ ja $\cos \alpha$ avulla. (Vihje: Tarkastele kompleksilukua z^3 , missä $z = \cos \alpha + i \sin \alpha$.)
6. Ratkaise epäyhtälö
 - a) $\frac{2}{|2\sin x + 1|} < 1$, b) $\sin x > \cos 2x$ c) $\cos 2x - \tan x > 1$.