

Matematiikan perusmetodit/mat.

Harjoitus 7 syksy 2009

A osa:

1. Jaa polynomi $P(x) = x^3 + 3x^2 + 9x + 27$ tekijöihin
a) kunnassa \mathbb{R} , b) kunnassa \mathbb{C} .
2. Polynomin $P(x) = x^3 - 9x^2 + 9x + c$ yksi nollakohta on 2. Jaa $P(x)$ tekijöihin
a) kunnassa \mathbb{R} , b) kunnassa \mathbb{C} .
3. Olkoon $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ reaalikertoiminen polynomi. Osoita: Jos $z \in \mathbb{C}$ on polynomin $P(x)$ nollakohta, niin myös \bar{z} on $P(x)$:n nollakohta.
4. Osoita tarkasti, että $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{1+n^2} = 0$.
5. Laske raja-arvot
a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+7}{n^3+2}$ b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n+1}{2n^2+3}$ c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3+n-3}{n^2+1}$ d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 - (n-1)^2}{n}$
e) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - n)$ f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n}$.
6. Ratkaise polaariesitysten avulla yhtälöt (ratkaisut muodossa $x + yi$, missä $x, y \in \mathbb{R}$)
a) $z^3 = 1$ b) $z^6 = -1$.

Matematiikan perusmetodit/mat.

Harjoitus 7 syksy 2009

B osa:

1. Polynomien $P(x) = 2x^4 + 9x^3 + 3x^2 + 36x - 20$ yksi nollakohta on $2i$.
Jaa $P(x)$ tekijöihin
a) kunnassa \mathbb{R} , b) kunnassa \mathbb{C} .
2. Olkoot $z_1 = i$, $z_2 = 2 + i$ ja $z_3 = -3$. Määrää sellainen alinta astetta oleva
a) reaalikertoiminen polynomi, jonka nollakohtia ovat z_1 , z_2 ja z_3 .
b) kompleksikertoiminen polynomi, jonka nollakohtia ovat z_1 , z_2 ja z_3 .
3. Olkoot z_1, z_2, \dots, z_n yhtälön $z^n = 1$ ratkaisut, kun $n \in \mathbb{Z}_+$, $n \geq 2$.
Osoita, että $\sum_{k=1}^n z_k = 0$.
4. Osoita tarkasti, että $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{1+n^2}} = 1$.
5. Olkoot $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ja $b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. Osoita, että $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$.
6. Laske raja-arvot
a) $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2 + 1} - n)$ b) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(n - \sqrt{n^2 + \frac{1}{n}} \right)$
c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2}$ d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \right)$.
7. Ratkaise polaariesitysten avulla yhtälöt (ratkaisut polaariesityksinä)
a) $z^3 = -1 + i$ b) $z^5 = 1$.