Matematiikan perusmetodit/mat.

Harjoitus 8 syksy 2009

A osa:

Laskusääntöjä: $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ ja $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$.

1. Osoita tarkasti (funktion raja-arvon määritelmään perustuen), että

   a) $\lim_{x\to 2}(11x-18) = 4$ b) $\lim_{x\to -5}(-3x+1) = 16$.

2. Olkoot $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = b$ ja $c \in \mathbb{R}$. Osoita, että

   a) $\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = a+b$ b) $\lim_{x\to x_0}(cf(x)) = ca$.

3. Laske raja-arvot

   a) $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x}-2\sqrt{3}}{x^2+2}$, b) $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^2-1}{(1+x)^3-1}$, c) $\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4+x^2})$,

   d) $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1}(\frac{1}{x+3} - \frac{2}{3x+5})$.

4. Laske raja-arvot

   a) $\lim_{x\to 5} \frac{x-5}{x^2-4x-5}$, b) $\lim_{x\to 1} \frac{x^4-1}{x^2-1}$, c) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-2x^2+x-2}{x^2-2x}$, d) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x^2-x-1}{x^2+x-2}$.

5. Laske raja-arvot

   a) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1}$, b) $\lim_{x\to 3} \frac{x^3-27}{x-3}$, c) $\lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{|x|-2}$, d) $\lim_{x\to 1} \frac{x^4-1}{x^6-1}$.

6. Laske raja-arvot

   a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$, b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x^2-2x}$, c) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+2}}{x-1}$,

   d) $\lim_{x\to 0} f(x)$, kun $\sqrt{5-2x^2} \le f(x) \le \sqrt{5-x^2}$ kaikilla $x \in [-1,1]$.

7. Määrää sellainen luku $a \in \mathbb{R}$, että raja-arvo $\lim_{x\to 2} \frac{ax^2-6x+4}{x^2-x-2}$ on äärellisenä olemassa. Mikä tämä raja-arvo on?

8. Määrää sellaiset luvut $a, b \in \mathbb{R}$, että raja-arvo $\lim_{x\to 1} \frac{ax^2+bx+1}{x-1}$ on äärellisenä olemassa. Mikä tämä raja-arvo on?

9. Olkoon $\lim_{x\to x_0} f(x) = a < 0$. Osoita, että on olemassa sellainen aito ympäristö $B'_\delta(x_0)$, että $f(x) < \frac{a}{2} < 0$ aina, kun $x \in B'_\delta(x_0)$.

Matematiikan perusmetodit/mat.

Harjoitus 8 syksy 2009
B osa:

1. Osoita tarkasti (funktion raja-arvon määritelmään perustuen), että

$$\lim_{x\to 2} x^2 = 4.$$

2. Olkoon $\varepsilon > 0$ ja $\delta_\varepsilon = \min(\frac{3}{2}, \frac{9\varepsilon}{2})$. Osoita, että

   a) $\frac{1}{|x|} \le \frac{2}{3}$ aina, kun $0 < |x-3| < \frac{3}{2}$.

   b) $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon$ aina, kun $0 < |x-3| < \delta_\varepsilon$.

3. Olkoot $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$ ja $\lim_{x\to x_0} g(x) = b$. Osoita, että jos $f(x) \le g(x)$ x_0:n jossakin aidossa ympäristössä, niin $a \le b$.

4. Laske raja-arvot

   a) $\lim_{x\to 2} \frac{x-\sqrt{2x}}{x^2-4}$ b) $\lim_{x\to 1} \frac{x\sqrt{x}-x+\sqrt{x}-1}{x-1}$ c) $\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x} - \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}})$ d) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+27}-3}{x}$

5. Määrää sellaiset luvut $a, b \in \mathbb{R}$, että raja-arvo $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-ax-b}{x^2}$ on äärellisenä olemassa. Mikä tämä raja-arvo on?