

Matematiikan perusmenetit/mat.

Harjoitus 9 syksy 2009

A osa:

1. Määrää raja-arvot

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x}$, b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(x-3)}{x-3}$, c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{7x}$, d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(11x) \sin(10x) \sin(59x)}{x^3}$,
e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(13x^2)}{x^2}$, f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 8x}$, g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\sin 4x}$.

2. Määrää raja-arvot

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{3x} - \sqrt{2x}}{\sqrt{x}}$, b) $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{\sqrt{x-2}}{|x-4|}$, c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^6 + 5x^2 - 1}{3x^6 + 8}$, d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$,
e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$, f) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x})$,
g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x})$, h) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{9x^3 + 12x^2 + 1991x - 2112}{x-1}$,
i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{9x^3 + 12x^2 + 1991x - 2112}{(x-1)^2}$.

3. Määrää raja-arvot

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}$, b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}$, c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 4x}{x}$, d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x^2}$,
e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin x - x^3}{x^3}$, f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - 1}{\sin 3x}$, g) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+x} - 2}{\sin(x-1)}$, h) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{\tan x}$.

4. Määrää sellainen luku $a \in \mathbb{R}$, että funktio

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{kun } x \leq 2 \\ 2x + a, & \text{kun } x > 2 \end{cases}$$

on kaikkialla jatkuva.

5. Määrää sellaiset luvut $a, b \in \mathbb{R}$, että funktio

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{kun } x < 0 \\ b, & \text{kun } x = 0 \\ \frac{\tan(ax)}{bx}, & \text{kun } x > 0 \end{cases}$$

on jatkuva pisteessä 0.

6. Osoita, että jos jokaisella $\varepsilon > 0$ reaalityluku $a < \varepsilon$, niin $a \leq 0$.

Matematiikan perusmetodit/mat.

Harjoitus 9 syksy 2009

B osa:

1. Osoita tarkasti (määritelmään perustuen), että

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} -2x^3 = -\infty$, b) $\lim_{x \rightarrow 2} -\frac{1}{(x-2)^2} = -\infty$, c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x^3} = 0$,

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^2 + 5 = \infty$, e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 + x + 5 = -\infty$.

2. Määrää raja-arvot

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(\pi x)}{x-2}$, b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi x + x^2)}{x}$, c) $\lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{1 - \cos x}{(x-2\pi)^2}$, d) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{(x-\pi)^2}$.

3. Määrää raja-arvot

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - \sin 2x}{x^3}$, b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$, c) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos(x + \frac{\pi}{4})}$, d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 2x - 1}{x^2}$,

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\cos x \sin x}$, f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos 2x}{x^2}$, g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\cos x - 1)}{x^2}$.

4. Määrää raja-arvot ($[x]$ = suurin kokonaisluku, joka $\leq x$)

a) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x}$, b) $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$, c) $\lim_{x \rightarrow 1} \sin(\frac{\pi}{2}[x])$, d) $\lim_{x \rightarrow 1} [\sin(\frac{\pi}{2}x)]$.

5. Olkoon $f(x) = \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2}$. Voidaanko $f(0)$ määritellä niin, että f on jatkuva pisteessä 0?